2004

Olimpiada
Matemática
Española

RSME

Editado y reproducido por la Real Sociedad Matemática Española.
Facultad de Matemáticas. Universidad Complutense de Madrid.
Avenida de la Complutense s/n.
28040 - Madrid

Primera edición del CDROM: julio de 2004.

Tirada del CDROM: 500 ejemplares.

ISBN 84-933610-4-6

Depósito Legal: M-33112-2004

# CONTENIDO

# PRESENTACIÓN

Decía Voltaire que hay más imaginación en la cabeza de un matemático que en la de Homero. No vamos a quitarle mérito al genial autor de la Ilíada, pero sí a señalar que, efectivamente, la gran cualidad de las matemáticas y la más necesaria para hacer matemáticas es la imaginación. Imaginación para pensar relaciones que a simple vista pasan desapercibidas o que incluso pueden parecer disparatadas. Imaginación para encontrar ecuaciones donde sólo hay datos inconexos. Naturalmente que las soluciones tienen que ser después formalizadas con el rigor y la precisión correctas de las matemáticas, pero eso forma parte ya de la técnica, del oficio, no tanto del acto creativo. Desgraciadamente se identifica casi siempre las matemáticas más con el formalismo que con la imaginación y la creatividad. Y nada más lejos de la realidad.

Cada problema (y en este CD-ROM encontrarás muchos) es un desafío al que enfrentarse. Cada solución un acto creativo. ¿Con qué armas contamos? Con los conocimientos, la determinación, la paciencia y sobre todo la imaginación. La recompensa: la satisfacción del artista por la creación realizada. Estoy seguro de que ya la has experimentado, y en todo caso aquí tendrás ocasión de hacerlo.

Este CD-ROM contiene una serie de problemas, informaciones y reportajes gráficos sobre la Olimpíada Matemática Española que desde hace ya casi cuarenta años la Real Sociedad Matemática Española (RSME) viene organizando con la colaboración del Ministerio de Educación, Cultura y Deporte. El objetivo que perseguimos es intentar entusiasmar a nuestros jóvenes con el placer de hacer matemáticas, de ejercer la imaginación en la resolución de problemas, de abrir una ventana al vasto horizonte de las matemáticas un poco más allá de lo que las aulas y los cursos ordinarios permiten. Estamos convencidos de que aquellos que sucumban a sus encantos quedarán definitivamente enganchados a ellos. Son muchos los matemáticos españoles relevantes que comenzaron su andadura matemática precisamente a través de las Olimpíadas. Este CD-ROM es un excelente esfuerzo para acercar y difundir a todos los centros y personas interesados el material elaborado en la preparación y celebración de las Olimpíadas. Por ello quiero felicitar y agradecer a la Comisión de Olimpíadas de la RSME su esfuerzo y generosidad, y especialmente al profesor J. Grané sin cuyo trabajo este material no se habría realizado.

Y a ti, querido amigo lector, te invito a adentrarte por los vericuetos matemáticos que se te ofrecen y a vivirlos intensamente. Desde la RSME intentaremos ofrecerte todo el apoyo que podamos en tu aventura.

Carlos Andradas
Presidente de la Real Sociedad Matemática Española.

## Nota sobre los datos históricos

Este CDROM pretende continuar la recopilación de documentos gráficos y escritos que desde 1963 han ido configurando las Olimpiadas de Matemáticas en España. Los problemas que aparecen no son más que los que han sido propuestos en la segunda fase de todas Olimpiadas Españolas. Han sido copiados con muy pocas modificaciones, y si las ha habido, ha sido siempre para enmendar errores manifiestos de los originales conseguidos. También se han añadido, al final de cada capítulo, los nombres de los ganadores de cada una de las ediciones.
La colección de enunciados de problemas y de concursantes premiados que figura en esta publicación tiene diversos orígenes. Los principales son:

1) La Gaceta Matemática de la Real Sociedad Matemática Española que publicaba cada año las listas de problemas y ganadores por distritos y también de la segunda fase. Lamentablemente, la colección se interrumpió el año 1982, y en algunos años anteriores la información era incompleta.

2) La colección personal de problemas del Profesor Francisco Bellot Rosado, que ha permitido proseguir desde la desaparición de la Gaceta. Dichos problemas, confirmados por hojas de enunciados repartidos en las pruebas y que se han podido conseguir, han sido indispensables para completar los problemas de la segunda fase. El Profesor Bellot también nos ha proporcionado datos sobre la participación de concursantes españoles en las Olimpiadas Internacionales e Iberoamericanas.

3) La información contenida en las resoluciones de la actual Subdirección General de Becas y Ayudas al Estudio del Ministerio de Educación, Cultura y Deporte, donde figuran los nombres de los estudiantes que han tenido beca de estudios olímpica, o bien premios en metálico. Estos datos han sido valiosos para completar las listas de ganadores de determinados años y confirmar otras fuentes.

4) La información verbal que nos ha proporcionado la Profesora María Gaspar Alonso-Vega, que fué acompañante de los primeros equipos españoles a las Olimpiadas Internacionales e Iberoamericanas.

5) Las informaciones escritas o verbales de muchas personas que en algun momento han tenido relación con las Olimpiadas. Aunque sea a costa de olvidar alguna, cosa que lamento y por la que pido disculpas, quiero mencionar:
Josep Burillo Puig, Joan Elías García, Fernando Etayo Gordejuela, Jaume Lluís García Roig, Josep Gelonch Anyé, Antoni Gomà Nasarre, Fernando Herrero Buj, Santiago Manrique Catalán, Daniel Marquès Solé, Fco. Javier Martínez de Albéniz Salas, Ramon Masip Treig, Josep M. Mondelo González, Ignasi Mundet Riera, Vicente Muñoz Velázquez, Teresa Novelle Saco, Antoni Oliva Cuyàs, Francesc Prats Duaygües, Antoni Ras Sabidó, Roberto Selva Gómez, Josep Oriol Solé Subiela, Olga Tugues, Gerald Welters Dyhdalewicz, etc.

Doy las gracias a todos los que me han ayudado a completar esta tercera entrega de la historia de las Olimpiadas Matemáticas Españolas. Quiero agradecer especialmente a la Profesora Marta Valencia Guinart su ayuda esencial en el diseño y la realización de este CDROM. Y quiero mencionar, con un especial recuerdo, a la profesora Griselda Pascual Xufré, ya fallecida, que tanto nos ayudó en la corrección de las pruebas. La Universitat Politècnica de Catalunya nos ha dado todo el soporte material necesario para el diseño y la reproducción.

Marzo de 2003

Josep Grané Manlleu

## NOTA SOBRE LAS FOTOGRAFÍAS

Las fotografías tienen el siguiente origen:

**1.- Fotos de premiados.**

Olimpiadas I a XVII: De la *Gaceta Matemática* de la Real Sociedad Matemática Española. Obtenidas con scanner en niveles de gris a partir de la publicación. En algunos casos la calidad es bastante baja, pero hemos creído oportuno incluirlas a pesar de todo.

Olimpiada XXXI, XXXII, XXXIII y XXXIV: Respectivamente, de las Actas de Castellón, Tarragona, Valencia y Tarazona. Las fotos en color son del archivo de la Societat Catalana de Matemàtiques o de los propios participantes.

Olimpiadas XXXV a XL: Del archivo de la Comisión de Olimpiadas de la RSME.

**2.- Olimpiadas Internacionales.**
24: CR y JB; 26: MG y CR; 27: CR; 28: MG y CR; 29: FB y MG; 30: VM y MG; 31: FB y JC; 32: JC; 33: JC; 34: FB y JC; 35: FB y JC; 36: FB y JC; 37: FB y JC; 38: FB, JC y MM; 39: MG; 40: AT; 41: AS, RR y JC; 42: MS y SM; 43: DR, MG y SM; 44: LH.

**3.- Olimpiadas Iberoamericanas.**
1: MG y CR; 2: CR; 3: MG; 4: MG y VM; 5: MG y VM; 6: MG; 12: MA; 13: CR; 14: CR; 15: AS y CR; 16: CR; 17: DR y SM; 18: LH.

**4.- Olimpiadas Españolas.**
32: FB; 33: TN; 34: GD; 35: CR; 36: MA; 37: FB y MG; 38: CR, MG y SM; 39: CA, LH y MP; 40: CA y LH.

AS: Alberto Suárez Real
AT: Andrés Tallos Tanarro
CA: Carles Romero Chesa
CR: Ceferino Ruiz Garrido
DR: Daniel Rodrigo López
FB: Francisco Bellot Rosado
GD: Guillermo Dorda Abaúnza
LH: Luis Hernández Corbato
JB: Josep Burillo Puig
JC: Juan Manuel Conde Calero
MA: Miquel Amengual Coves
MG: María Gaspar Alonso-Vega
MM: Mario Andrés Montes García
MP: Maite Peña Alcaraz
MS: Mercedes Sánchez Benito
RR: Roberto Rubio Núñez
SM: Sergio Millán López
TN: Teófilo Navarro García
VM: Vicente Muñoz Velázquez

Lamentablemente, faltan muchas fotos en esta colección, y sería bueno poderlas conseguir en el futuro. Pero esto requerirá una labor más paciente y la voluntad de las personas afectadas.

Como es lógico, en las olimpiadas más antiguas, la parte numéricamente más importante de la colección corresponde a las fotografías proporcionadas por María Gaspar, Francisco Bellot, Juan Manuel Conde y Ceferino Ruiz. A ellos les doy las gracias por su colaboración generosa, repetida y entusiasta.

El agradecimiento se extiende también a Miquel Amengual Coves, Josep Burillo Puig, Guillermo Dorda Abaúnza, Luis Hernández Corbato, Sergio Millán López, Mario Andrés Montes García, Vicente Muñoz Velázquez, Teófilo Navarro García, María Pe Pereira, Maite Peña Alcaraz, Daniel Rodrigo López, Carles Romero Chesa, Roberto Rubio Núñez, Mercedes Sánchez Benito, Alberto Suárez Real, y Andrés Tallos Tanarro, que con su aportación han permitido cubrir completamente algunos años y complementar otros. Me permito, además, transmitirles esta gratitud en nombre de la RSME.

## NOTA SOBRE LAS INDICACIONES DE PREMIOS

En las páginas correspondientes a las diferentes ediciones de las IMO y OIM, se indican los premios obtenidos por el equipo español. Como es natural, las indicaciones *oro*, *plata* y *bronce* se refieren a la obtención de Medalla de Oro, Medalla de Plata y Medalla de Bronce, respectivamente.

La indicación *MH* se refiere a la obtención de Mención Honorífica. La indicación *mh* se refiere a la obtención de méritos equivalentes a una Mención Honorífica, antes de haberse instaurado oficialmente dicho premio.

Julio de 2004
Josep Grané Manlleu

**Nota sobre las soluciones de los problemas**

A la vista de esta excelente recopilación de carácter documental sobre las ediciones de la Olimpiada Matemática Española, surgió de una manera natural una iniciativa tendente a añadirle utilidad práctica. Aunque existen algunas publicaciones españolas con problemas resueltos sobre olimpiadas, no hay ninguna que aborde de modo sistemático la resolución de todos los problemas de la Fase Nacional. Considerando que este material constituye una ayuda inestimable para los profesores y alumnos que preparan este tipo de pruebas, en la reunión de la Comisión de Olimpiadas de la RSME celebrada en noviembre de 2002 se acordó constituir un comité para redactar las soluciones de los 276 problemas que han sido propuestos en las 40 ediciones de la Fase Nacional de la Olimpiada Matemática Española.
Como los problemas han ido evolucionando paralelamente a los contenidos de las matemáticas preuniversitarias algunos enunciados han quedado muy desfasados y otros ha habido que reinterpretarlos.
Las personas que han aportado soluciones son:
Miquel Amengual Coves, Francisco Bellot Rosado, Manuel Benito Muñoz, Juan Manuel Conde Calero, Emilio Fernández Moral, Víctor González Alonso, Josep Grané Manlleu, M. Ascensión López Chamorro, Mercedes Sánchez Benito, Cristóbal Sánchez-Rubio.
Hay también sugerencias para cada problema, de manera que los enlaces desde un problema a su solución pasan siempre por un texto breve intermedio de ayuda. Esto permite que los futuros usuarios de estos problemas tengan la oportunidad de pensarlos un poco más antes de consultar la solución explícita. Las sugerencias han sido redactadas por ganadores de Olimpiadas recientes:
David García Soriano, Javier Gómez Serrano, Víctor Gónzalez Alonso, Luis Hernández Corbato, Susana Ladra González, José Miguel Manzano Prego, Sergio Millán López, Daniel Rodrigo López.
Hay que agradecer a todos ellos, tanto a los redactores de soluciones como a los de las sugerencias, su excelente y desinteresado trabajo.

Julio de 2004

Mercedes Sánchez Benito
Cristóbal Sánchez-Rubio
Coordinadores del comité para la edición de las soluciones.

**ENLACES**

$\boxed{E}$ $\Longleftrightarrow$ Enlace al enunciado de un problema

$\boxed{A}$ $\Longleftrightarrow$ Enlace a la ayuda de un problema

$\boxed{S}$ $\Longleftrightarrow$ Enlace a la solución de un problema

# OLIMPIADAS MATEMÁTICAS ESPAÑOLAS

# I (1963)

A

# XL (2004)

*Primera sesión*

**1/1.** Dada la ecuación $x^2 + ax + 1 = 0$, determinar

a) El intervalo en que debe mantenerse el número real $a$ para que las raíces de esa ecuación sean imaginarias.

b) El lugar geométrico de los puntos representativos de esas raíces en la representación gráfica habitual de los números complejos, cuando $a$ recorre el intervalo anterior.

**1/2.** El impuesto sobre el Rendimiento del Trabajo Personal es una función $f(x)$ del total $x$ de las retribuciones anuales (en pesetas). Sabiendo que

a) $f(x)$ es una función continua.

b) La derivada $df(x)/dx$ en el intervalo $0 \leq x < 60000$ es constante e igual a cero; en el intervalo $60000 < x < P$ es constante e igual a 1; y para $x > P$ es constante e igual a $0.14$.

c) $f(0) = 0$ y $f(140000) = 14000$.

Determinar el valor de la cantidad $P$ de pesetas y representar gráficamente la función $y = f(x)$.

**1/3.** Se considera un polígono convexo de $n$ lados. Se trazan todas sus rectas diagonales y se supone que en ningún caso concurren tres de ellas en un punto que no sea un vértice, y que tampoco hay diagonales que sean paralelas. En estas condiciones se desea calcular:

a) El número total de puntos de intersección de estas diagonales, excluidos los vértices.

b) Cuántos de estos puntos son interiores al polígono, y cuántos exteriores.

**1/4.** Dados el triángulo equilátero $ABC$, de lado $a$, y su circunferencia circunscrita, se considera el segmento de círculo limitado por la cuerda $AB$ y el arco (de $120°$) con los mismos extremos. Al cortar este segmento circular con rectas paralelas al lado $BC$, queda determinado sobre cada una de ellas un segmento de puntos interiores al segmento circular mencionado. Determinar la longitud máxima de esos segmentos rectilíneos.

*Segunda sesión*

**1/5.** Dado un pentágono regular, se dibujan sus cinco segmentos diagonales. Se pide determinar el número total de triángulos que aparecen construidos en la figura y clasificar este conjunto de triángulos en clases de triángulos iguales (directa o inversamente) entre sí.

**1/6.** Representar gráficamente la función

$$y = \Big| \big| |x-1| - 2 \big| - 3 \Big|$$

en el intervalo $-8 \leq x \leq 8$.

**1/7.** Se considera un fichero con 1000 fichas numeradas, ordenadas en su orden natural. A ese fichero se le aplica la siguiente operación:
*La primera ficha del fichero se coloca intercalada entre la penúltima y la última del mismo, y la segunda, al final de todas, quedando, por tanto, en primer lugar la que antes ocupaba el tercero.*
Observando la sucesión de posiciones ocupadas por cada una de las fichas, demostrar que al cabo de 1000 operaciones análogas, aplicadas sucesivamente (cada una a la ordenación resultante de la operación anterior), el fichero vuelve a estar en su orden natural.
Comprobar que no podría obtenerse un resultado análogo ($n$ operaciones para un fichero de $n$ fichas) si se tratase de un fichero con un número impar $n$ de fichas.

**1/8.** En un plano vertical se consideran los puntos $A$ y $B$ situados sobre una recta horizontal, y la semicircunferencia de extremos $A, B$ situada en el semiplano inferior. Un segmento de longitud $a$, igual al diámetro de la semicircunferencia, se mueve de manera que contiene siempre el punto $A$, y que uno de sus extremos recorre la semicircunferencia dada. Determinar el valor del coseno del ángulo que debe formar ese segmento con la recta horizontal, para que su punto medio esté lo más bajo posible.

---

**Premiados:** Eugenio J. Miranda Palacios, Alberto de la Torre, Antoni Oliva Cuyàs.

*Primera sesión*

A **2/1.** Un triángulo equilátero inscrito en una circunferencia de centro $O$ y radio igual a 4 cm, se gira un ángulo recto en torno a $O$. Hallar el área de la parte común al triángulo dado y al obtenido en ese giro.

A **2/2.** ¿Cuántos números de tres cifras (es decir, mayores que 99 y menores que 1000) hay que tengan su cifra central mayor que las otras dos? ¿Cuántos de ellos tienen además las tres cifras distintas?

A **2/3.** Un disco microsurco gira a velocidad de $33\frac{1}{3}$ revoluciones por minuto y su audición dura 24 min 30 s. La parte grabada tiene 29 cm de diámetro exterior y 11.5 cm de diámetro interior. Con estos datos, calcular la longitud del surco grabado.

A **2/4.** Hallar todos los intervalos de valores de $x$ para los cuales

$$\cos x + \operatorname{sen} x > 1;$$

el mismo problema para

$$\cos x + |\operatorname{sen} x| > 1.$$

*Segunda sesión*

**2/5.** Es bien sabido que si $p/q = r/s$, ambas razones son iguales a $(p-r)/(q-s)$. Escribimos ahora la igualdad

$$\frac{3x-b}{3x-5b} = \frac{3a-4b}{3a-8b}.$$

Por la propiedad anterior, ambas fracciones deben ser iguales a

$$\frac{3x-5b-3a+8b}{3x-b-3a+4b} = \frac{3x-3a+3b}{3x-3a+3b} = 1$$

mientras que las propuestas son de ordinario distintas de la unidad. Explicar con claridad a qué se debe este resultado.

**2/6.** Se construye con alambre un triángulo equilátero de lado $\ell$ y se deposita sobre una esfera maciza de radio $r$ (que no pasa a través del triángulo anterior). ¿A qué distancia del centro de la esfera quedan los vértices del triángulo?

**2/7.** Un tronco de cono de revolución tiene su base mayor de radio $r$ y sus generatrices forman con el plano de la base un ángulo cuya tangente vale $m$. Este tronco de cono está formado por un material de densidad $d$ y su base menor está recubierta por una lámina cuya masa es de $p$ g/cm$^2$. ¿Cuál es la altura del tronco para la cual la masa total es máxima? Discusión completa del problema.

**2/8.** Sea $\gamma_1$ una circunferencia de radio $r$ y $P$ un punto exterior que dista $a$ de su centro. Se suponen construidas las dos rectas tangentes a $\gamma_1$ desde $P$, y sea $\gamma_2$ una circunferencia de radio menor que el de $\gamma_1$, tangente a esas dos rectas y a $\gamma_1$; en general, una vez construida la circunferencia $\gamma_n$ se construye otra $\gamma_{n+1}$ de radio menor que el de $\gamma_n$, tangente a las dos rectas citadas y a $\gamma_n$. Determinar

a) El radio de $\gamma_2$.

b) La expresión general del radio de $\gamma_n$.

c) El límite de la suma de las longitudes de las circunferencias $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n, \ldots$

---

**Premiados:** Luis Puig Espinosa, Jaime Vinuesa Tejedor, Andrés Méndez Rutllán.

# 1965-66 III Olimpiada Matemática Española 3

*Primera sesión*

**3/1.** A un fabricante de tres productos cuyos precios por unidad son de 50, 70 y 65 pta, le pide un detallista 100 unidades, remitiéndole en pago de las mismas 6850 pta, con la condición de que mande el mayor número posible del producto de precio superior y las restantes de los otros dos. ¿Cuántas deberá enviar de cada producto para servir el pedido?

**3/2.** Un número de tres cifras se escribe $xyz$ en el sistema de base 7 y $zyx$ en el sistema de base 9. ¿Cuál es el número?

**3/3.** Dado un pentágono regular se considera el pentágono convexo limitado por sus diagonales. Se pide calcular:

a) La relación de semejanza entre los dos pentágonos convexos.

b) La relación de sus áreas.

c) La razón de la homotecia que transforma el primero en el segundo.

**3/4.** Se quiere colgar un peso $P$ de modo que quede 7 m por debajo de un techo. Para ello se suspende mediante un cable vertical sujeto al punto medio $M$ de una cadena colgada por sus extremos de dos puntos del techo $A$ y $B$ distantes entre sí 4 m. El precio del cable $PM$ es $p$ pta/m y el de la cadena $AMB$ es $q$ pta/m. Se pide:

a) Determinar las longitudes del cable y de la cadena para obtener el precio más económico de la instalación.

b) Discutir la solución para los distintos valores de la relación $p/q$ de ambos precios.

(Se supone que el peso es lo suficientemente grande para poder considerar como rectilíneos los segmentos de cadena $AM$ y $MB$).

*Segunda sesión*

**3/5.** La longitud de la hipotenusa $BC$ de un triángulo rectángulo $ABC$ es $a$, y sobre ella se toman los puntos $M$ y $N$ tales que $BM = NC = k$, con $k < a/2$. Supuesto que se conocen (tan sólo) los datos $a$ y $k$, calcular:

a) El valor de la suma de los cuadrados de las longitudes $AM$ y $AN$.

b) La razón de las áreas de los triángulos $ABC$ y $AMN$.

c) El área encerrada por la circunferencia que pasa por los puntos $A$, $M'$, $N'$, siendo $M'$ la proyección ortogonal de $M$ sobre $AC$ y $N'$ la de $N$ sobre $AB$.

**3/6.** Nos indican que un matrimonio tiene 5 hijos. Calcular la probabilidad de que entre ellos haya por lo menos dos varones y por lo menos una mujer. La probabilidad de nacer varón se considera $1/2$.

**3/7.** Determinar una progresión geométrica de siete términos, conociendo la suma, 7, de los tres primeros, y la suma, 112, de los tres últimos.

**3/8.** Determinar los valores de $a$, $b$, $c$, para que la representación gráfica de la función

$$y = ax^3 + bx^2 + cx$$

tenga una inflexión en el punto de abscisa $x = 3$, con tangente en él de ecuación

$$x - 4y + 1 = 0.$$

Dibújese después la gráfica correspondiente.

---

**Premiados:** José L. Rubio de Francia, Manuel Gamella Bacete, Antonio Vázquez Rodríguez.

*Primera sesión*

A **4/1.** Se sabe que la función real $f(t)$ es monótona creciente en el intervalo $-8 \leq t \leq 8$, pero no se sabe nada de lo que ocurre fuera de éste. ¿En qué intervalo de valores de $x$ se puede asegurar que sea monótona creciente la función $y = f(2x - x^2)$?

A **4/2.** Determinar los polos de las inversiones que transforman cuatro puntos $A$, $B$, $C$, $D$, alineados en este orden, en cuatro puntos $A'$, $B'$, $C'$, $D'$ que sean vértices de un paralelogramo rectángulo, y tales que $A'$ y $C'$ sean vértices opuestos.

A **4/3.** Un semáforo instalado en un cruce principal de una vía, en la que se circula en ambos sentidos, permanece en rojo 30 s y en verde otros 30 s, alternativamente. Se desea instalar otro semáforo en la misma vía, para un cruce secundario, situado a 400 m de distancia del primero, que funcione con el mismo período de 1 min de duración. Se quiere que los coches que circulan a 60 Km/h por la vía en cualquiera de los dos sentidos y que no se tienen que parar si sólo hubiese el semáforo del cruce principal, tampoco se tengan que parar después de instalar el del cruce secundario. ¿Cuántos segundos puede estar encendido el rojo en el semáforo secundario?
*Nota:* Se sugiere razonar sobre una representación cartesiana de la marcha de los coches, tomando un eje de distancias y otro de tiempos.

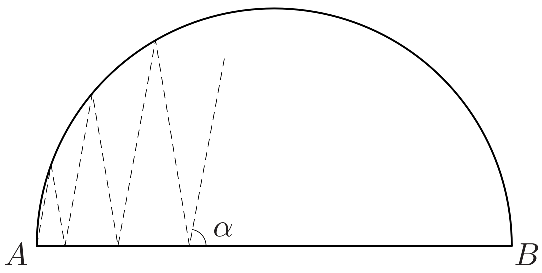
A **4/4.** Se tiene un botella de fondo plano y circular, cerrada y llena parcialmente de vino, de modo que su nivel no supere la parte cilíndrica. Discutir en qué casos se puede calcular la capacidad de la botella sin abrirla, disponiendo solamente de un doble decímetro graduado; y en caso de que sea posible, describir cómo se calcularía. (Problema de la *Gara Matematica* italiana).

*Segunda sesión*

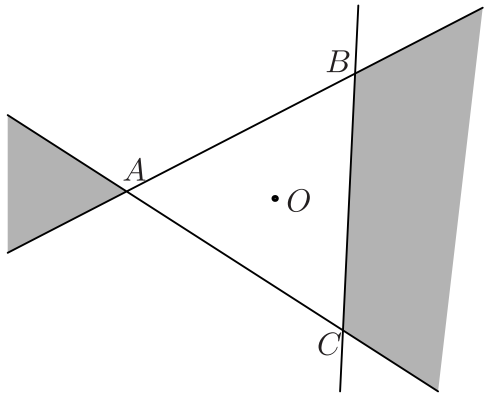
**4/5.** Sea $\gamma$ una semicircunferencia de diámetro $AB$. Se construye una quebrada con origen en $A$, que tiene sus vértices alternativamente en el diámetro $AB$ y en la semicircunferencia $\gamma$, de modo que sus lados forman ángulos iguales $\alpha$ con el diámetro (pero alternativamente de uno y otro sentido). Se pide:

a) Valores del ángulo $\alpha$ para que la quebrada pase por el otro extremo $B$ del diámetro.

b) La longitud total de la quebrada, en el caso que termine en $B$, en función de la longitud $d$ del diámetro y del ángulo $\alpha$.




*Problema* 4/5




*Problema* 4/6

**4/6.** Se da un triángulo equilátero $ABC$ de centro $O$ y radio $OA = R$, y se consideran las siete regiones que las rectas de los lados determinan sobre el plano. Se pide dibujar y describir la región del plano tansformada de las dos regiones sombreadas en la figura adjunta, por la inversión de centro $O$ y potencia $R^2$.

**4/7.** Por una carretera circula una caravana de coches, todos a la misma velocidad, manteniendo la separación mínima entre uno y otro señalada por el Código de Circulación. Esta separación es, en metros,

$$\frac{v^2}{100},$$

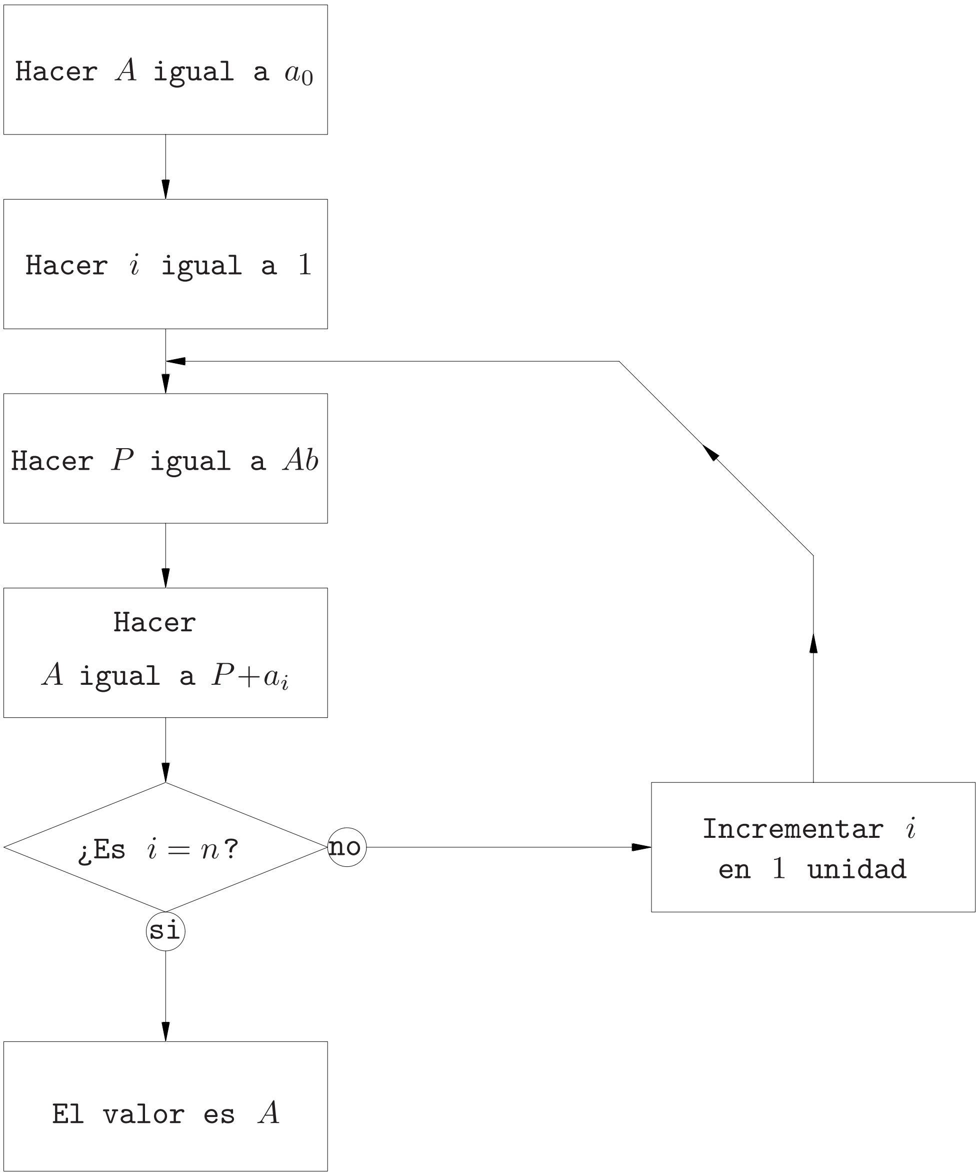
donde $v$ es la velocidad expresada en Km/h. Suponiendo que la longitud de cada coche es de 2.89 m, calcular la velocidad a la que deben circular para que la capacidad de tráfico resulte máxima, es decir, para que en un tiempo fijado pasen el máximo número de vehículos por un punto de la carretera.

A

**4/8.** Para obtener el valor de un polinomio de grado $n$, cuyos coeficientes son

$$a_0, a_1, \dots, a_n$$

(comenzando por el término de grado más alto), cuando a la variable $x$ se le da el valor $b$, se puede aplicar el proceso indicado en el *organigrama* adjunto, que desarrolla las acciones requeridas para aplicar la regla de Ruffini. Se pide construir otro organigrama análogo que permita expresar el cálculo del valor de la *derivada* del polinomio dado, también para $x = b$.




**Premiados:** Bernardo López Melero, Arturo Fraile Pérez, Julio Falivene Raboso.

*Primera sesión*

**5/1.** En una noche la temperatura del aire se mantuvo constante, varios grados bajo cero, y la del agua de un estanque cilíndrico muy extenso, que formaba una capa de 10 cm de profundidad, llegó a ser de cero grados, comenzando entonces a formarse una capa de hielo en la superficie. En estas condiciones puede admitirse que el espesor de la capa de hielo formada es directamente proporcional a la raíz cuadrada del tiempo transcurrido. A las 0 h, el espesor del hielo era de 3 cm y a las 4 h justamente se acabó de helar el agua del estanque. Calcular a qué hora comenzó a formarse la capa de hielo, sabiendo que la densidad del hielo formado era de 0.9.

**5/2.** Razonar si puede afirmarse, negarse o no puede decidirse la continuidad en el punto $x = 0$ de una función real $f(x)$ de variable real, en cada uno de los tres casos (independientes).

a) Se sabe únicamente que para todo $n$ natural

$$f\left(\frac{1}{2n}\right) = 1 \text{ y } f\left(\frac{1}{2n+1}\right) = -1.$$

b) Se sabe que para todo $x$ real no negativo es $f(x) = x^2$ y para $x$ real negativo es $f(x) = 0$.

c) Se sabe únicamente que para todo $n$ natural es

$$f\left(\frac{1}{n}\right) = 1.$$

**5/3.** Dado un cuadrado cuyo lado mide $a$, se considera el conjunto de todos los puntos de su plano por los que pasa una circunferencia de radio $a$ cuyo círculo contenga al cuadrado citado. Se pide probar que el contorno de la figura formada por los puntos con esa propiedad está formado por arcos de circunferencia, y determinar las posiciones de sus centros, sus radios y sus longitudes.

**5/4.** En los dos extremos $A$, $B$ de un diámetro (de longitud $2r$) de un pavimento circular horizontal se levantan sendas columnas verticales, de igual altura $h$, cuyos extremos soportan una viga $A'B'$ de longitud igual al diámetro citado. Se forma una cubierta colocando numerosos cables tensos (que se admite que quedan rectilíneos), uniendo puntos de la viga $A'B'$ con puntos de la circunferencia borde del pavimento, de manera que los cables queden perpendiculares a la viga $A'B'$. Se desea averiguar el volumen encerrado entre la cubierta y el pavimento.

*Segunda sesión*

A

**5/5.** Hallar el lugar geométrico del centro de un rectángulo, cuyos cuatro vértices describen el contorno de un triángulo dado.

A

**5/6.** Razonar si en todo tetraedro son concurrentes:
a) Las perpendiculares a las caras en sus circuncentros.
b) Las perpendiculares a las caras en sus ortocentros.
c) Las perpendiculares a las caras en sus incentros.
En caso afirmativo, caracterizar con alguna propiedad geométrica sencilla el punto en que concurren. En caso negativo mostrar un ejemplo en el que se aprecie claramente la no concurrencia.

A

**5/7.** En la succesión de potencias de 2 (escritas en el sistema decimal, comenzando con $2^1 = 2$) hay tres términos de una cifra, otros tres de dos cifras, otros tres de 3, cuatro de 4, tres de 5, etc. Razonar claramente las respuestas a las cuestiones siguientes:
a) ¿Puede haber solamente dos términos con un cierto número de cifras?
b) ¿Puede haber cinco términos consecutivos con el mismo número de cifras?
c) ¿Puede haber cuatro términos de $n$ cifras, seguidos de cuatro con $n+1$ cifras?
d) ¿Cuál es el número máximo de potencias consecutivas de 2 que pueden encontrarse sin que entre ellas haya cuatro con el mismo número de cifras?

A

**5/8.** Supondremos que los lados de un cuadrado son reflectantes y los designaremos con los nombres de los cuatro puntos cardinales. Señalando un punto en el lado N, determinar en qué dirección debe salir un rayo de luz (hacia el interior del cuadrado) para que retorne a él después de haber sufrido $n$ reflexiones en el lado E, otras $n$ en el lado W, $m$ en el S y $m-1$ en el N, siendo $n$ y $m$ números naturales conocidos. ¿Qué ocurre si $m$ y $n$ no son primos entre sí? Calcular la longitud del rayo luminoso considerado en función de $m$ y $n$, y de la longitud del lado del cuadrado.

---

**Premiados:** Francisco J. Vives Arumí, Roberto Moriyón Salomón, Carlos A. Lucio Fernández.

*Primera sesión*

**6/1.** Hallar el lugar geométrico de los centros de las inversiones que transforman dos punto $A$, $B$ de una circunferencia dada $\gamma$, en puntos diametralmente opuestos de las circunferencias inversas de $\gamma$.

**6/2.** Hallar el lugar geométrico del afijo $M$, del número complejo $z$, para que esté alineado con los afijos de $i$ y de $iz$.

**6/3.** Una bolsa contiene cubos de plástico del mismo tamaño, cuyas caras han sido pintadas de colores: blanco, rojo, amarillo, verde, azul y violeta (sin repetir un color en dos caras del mismo cubo). ¿Cuántos de estos cubos puede haber distinguibles entre sí?

**6/4.** Se divide una circunferencia de radio $R$ en 8 partes iguales. Los puntos de división se designan sucesivamente por $A$, $B$, $C$, $D$, $E$, $F$, $G$ y $H$. Hallar el área del cuadrado formado al dibujar las cuerdas $AF$, $BE$, $CH$ y $DG$.

*Segunda sesión*

**6/5.** Demostrar que un polígono convexo de más de cuatro lados no puede ser descompuesto en otros dos, ambos semejantes al primero (directa o inversamente), por medio de un solo corte rectilíneo. Precisar razonadamente cuáles son los cuadriláteros y triángulos que admiten una descomposición de este tipo.

**6/6.** Dado un polinomio de coeficientes reales $P(x)$, ¿se puede afirmar que para todo valor real de $x$ es cierta alguna de las desigualdades siguientes:

$$P(x) \leq P(x)^2; \quad P(x) < 1 + P(x)^2; \quad P(x) \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{2}P(x)^2.$$

Encontrar un procedimiento general sencillo (entre los muchos existentes) que permita, siempre que nos den dos polinomis $P(x)$ y $Q(x)$, encontrar otro $M(x)$ tal que para todo valor de $x$, sea a la vez

$$-M(x) < P(x) < M(x) \quad \text{y} \quad -M(x) < Q(x) < M(x).$$

**6/7.** Un polígono convexo $A_1A_2\ldots A_n$ de $n$ lados e inscrito en una circunferencia, tiene sus lados que satisfacen las desigualdades

$$\overline{A_nA_1} > \overline{A_1A_2} > \overline{A_2A_3} > \cdots > \overline{A_{n-1}A_n}.$$

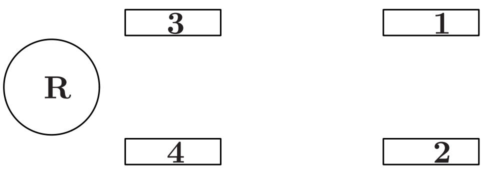
Demostrar que sus ángulos interiores satisfacen las desigualdades

$$\widehat{A_1} < \widehat{A_2} < \widehat{A_3} < \cdots < \widehat{A_{n-1}}, \qquad \widehat{A_{n-1}} > \widehat{A_n} > \widehat{A_1}.$$

**6/8.** La casa SEAT recomienda a los usuarios, para la correcta conservación de las ruedas, substituciones periódicas de las mismas en la forma **R** $\to$**3** $\to$**2** $\to$**1** $\to$**4** $\to$ **R**, según la numeración de la figura. Llamando $\mathcal{G}$ a este cambio de ruedas, $\mathcal{G}^2 = \mathcal{G}\,\mathcal{G}$ a la realización de este cambio dos veces, y así sucesivamente para las demás potencias de $\mathcal{G}$,

a) Demostrar que el conjunto de esas potencias forma un grupo, y estudiarlo.

b) Cada pinchazo de una de las ruedas equivale también a una sustitución en la que dicha rueda es reemplazada por la de repuesto (**R**) y, una vez reparada, pasa a ocupar el lugar de ésta. Obtener $\mathcal{G}$ como producto de transformaciones *pinchazo*. ¿Forman éstas un grupo?




**Premiados:** Jaume Lluís García Roig, Dolores Carrillo Gallego, Jorge Bustos Puche.

# 1969-70 VII Olimpiada Matemática Española 7

*Primera sesión*

**7/1.** Un recipiente cilíndrico de revolución está parcialmente lleno de un líquido cuya densidad ignoramos. Situándolo con el eje inclinado $30°$ respecto de la vertical, se observa que al sacar líquido de modo que el nivel descienda 1 cm, el peso del contenido disminuye 40 g. ¿Cuánto disminuirá el peso de ese contenido por cada centímetro que descienda el nivel si el eje forma un ángulo de $45°$ con la vertical? Se supone que la superficie horizontal del líquido no llega a tocar ninguna de les bases del recipiente.

**7/2.** Una planta crece del modo que describimos a continuación. Tiene un tronco que se bifurca en dos ramas; cada rama de la planta puede, a su vez, bifurcarse en otras dos ramas, o bien acabar en una yema. Llamaremos *carga* de una rama al número total de yemas que soporta, es decir, el número de yemas alimentadas por la savia que pasa por esa rama;y llamaremos *alejamiento* de una yema al número de bifurcaciones que la savia tiene que atravesar para llegar desde el tronco a esa yema.
Si $n$ es el número de bifurcaciones que tiene una determinada planta de ese tipo, se pide
a) el número de ramas de la planta,
b) el número de yemas,
c) demostrar que la suma de las cargas de todas las ramas es igual a la suma de los alejamientos de todas las yemas.
*Sugerencia:* Puede procederse por inducción, demostrando que si unos resultados son correctos para una determinada planta, siguen siéndolo para la planta que se obtiene sustituyendo en ella una yema por un par de ramas terminadas en sendas yemas.

**7/3.** Se da un triángulo arbitrario $ABC$ y un punto $P$ situado en el lado $AB$. Se pide trazar por $P$ una recta que divida al triángulo en dos figuras de la misma área.

**7/4.** Sabiendo que los polinomios

$$2x^5 - 13x^4 + 4x^3 + 61x^2 + 20x - 25$$
$$x^5 - 4x^4 - 13x^3 + 28x^2 + 85x + 50$$

tienen dos raíces dobles comunes, determinar todas sus raíces.

*Segunda sesión*

A **7/5.** En los exámenes de sexto curso de un Centro, aprueban la Física, al menos, el 70% de los alumnos; las Matemáticas, al menos, el 75%; la Filosofía, al menos, el 90%; y el Idioma, al menos, el 85%. ¿Cuántos alumnos, al menos, aprueban esas cuatro asignaturas?

A **7/6.** Dada una circunferencia $\gamma$ y dos punts $A$ y $B$ en su plano, se traza por $B$ una secante variable que corta $\gamma$ en dos puntos $M$ y $N$. Determinar el lugar geométrico de los centros de les circunferencias circunscritas al triángulo $AMN$.

A **7/7.** Calcular los valores de los cosenos de los ángulos $x$ que satisfacen la ecuación siguiente:

$$\operatorname{sen}^2 x - 2\cos^2 x + \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2x = 0.$$

A **7/8.** Se da un punto $M$ en el interior de una circunferencia, a una distancia $OM = d$ del centro $O$. Por $M$ se trazan dos cuerdas $AB$ y $CD$ que forman ángulo recto. Se une $A$ con $C$ y $B$ con $D$. Determinar el coseno del ángulo que ha de formar la cuerda $AB$ con $OM$ para que la suma de les áreas de los triángulos $AMC$ y $BMD$ sea mínima.

---

**Premiados:** Enrique Rodríguez Bono, Francisco J. Corella Monzón, Ignacio Alegre de Miguel.

*Primera sesión*

A **8/1.** Calcular

$$\sum_{k=5}^{k=49} \frac{11_{(k}}{2\sqrt[3]{1331_{(k}}}$$

sabiendo que los números 11 y 1331 están escritos en base $k \geq 4$.

A **8/2.** En una cierta geometría operamos con dos tipos de elementos, puntos y rectas, relacionados entre sí por los axiomas siguientes:

I. Dados dos puntos $A$ y $B$, existe una única recta $(AB)$ que pasa por ambos.

II. Sobre una recta existen al menos dos puntos. Existen tres puntos no situados sobre una recta.

III. Cuando un punto $B$ está situado entre $A$ y $C$, entonces $B$ está también entre $C$ y $A$. ($A$, $B$, $C$ son tres puntos diferentes de una recta.)

IV. Dados dos puntos $A$ y $C$ existe al menos un punto $B$ en la recta $(AC)$ de forma que $C$ está entre $A$ y $B$.

V. De entre tres puntos situados sobre una misma recta, uno como máximo, está entre los otros dos.

VI. Si $A$, $B$, $C$ son tres puntos no situados sobre la misma recta y $a$ es una recta que no contiene ninguno de los tres, cuando la recta pasa por un punto del segmento $[AB]$, entonces pasa por uno del $[BC]$, o pasa por uno del $[AC]$. (Designamos por $[AB]$ al conjunto de puntos que estan entre $A$ y $B$.)

A partir de los axiomas anteriores, demostrar las proposiciones siguientes:

*Teorema 1.* Entre los puntos $A$ y $C$ existe al menos un punto $B$.

*Teorema 2.* De entre tres puntos situados sobre una recta, uno está siempre entre los otros dos.

A **8/3.** Si $0 < p$, $0 < q$ y $p + q < 1$ demostrar

$$(px + qy)^2 \leq px^2 + qy^2.$$

A **8/4.** Demostrar que en todo triángulo de lados $a$, $b$, $c$ y ángulos opuestos $A$, $B$, $C$, se cumple (midiendo los ángulos en radianes)

$$\frac{aA + bB + cC}{a + b + c} \geq \frac{\pi}{3}.$$

*Indicación:* Utilizar $a \geq b \geq c \Longrightarrow A \geq B \geq C$.

*Segunda sesión*

**8/5.** Demostrar que cualquiera que sea el número complejo $z$, se cumple

$$\left(1+z^{2^n}\right)\left(1-z^{2^n}\right)=1-z^{2^{n+1}}.$$

Escribiendo las igualdades que resultan al dar a $n$ los valores 0, 1, 2, ... y multiplicándolas, demostrar que para $|z|<1$ se cumple

$$\frac{1}{1-z}=\lim_{k\to\infty}\left(1+z\right)\left(1+z^2\right)\left(1+z^{2^2}\right)\cdots\left(1+z^{2^k}\right).$$

**8/6.** Las velocidades de un submarino sumergido y en superficie son, respectivamente, $v$ y $kv$. Está situado en un punto $P$ a 30 millas del centro $O$ de un círculo de radio 60 millas. La vigilancia de una escuadra enemiga le obliga a navegar sumergido mientras está dentro del círculo. Discutir, según los valores de $k$, el camino más rápido para trasladarse al extremo opuesto del diámetro que pasa por $P$. (Considerar el caso particular $k=\sqrt{5}$.)

**8/7.** Transformar por inversión dos circunferencies concéntricas y coplanarias en dos iguales.

**8/8.** De entre los $2n$ números $1,2,3,\ldots,2n$ se eligen de cualquier forma $n+1$ números distintos. Demostrar que entre los números elegidos hay por lo menos dos, tales que uno divide al otro.

---

**Premiados:** M. Isabel Corella Monzón, Vicente Francés Tortosa, José M. Gil Martínez.

*Primera sesión*

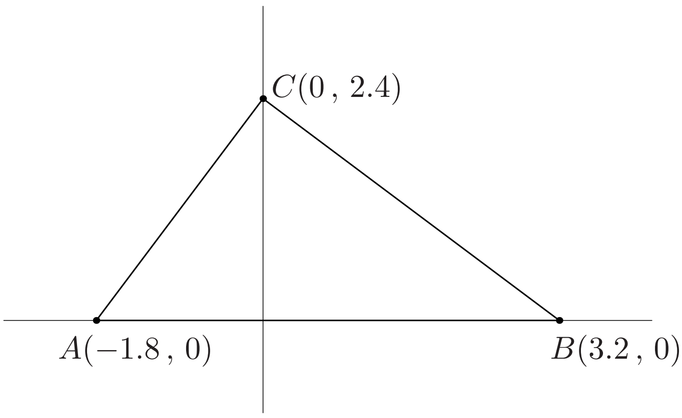
A **9/1.** Sea $\mathbb{K}$ un anillo con unidad y $M$ el conjunto de las matrices $2\times 2$ constituidas con elementos de $\mathbb{K}$. Se define en $M$ una adición y una multiplicación de la forma usual entre matrices. Se pide:

a) Comprobar que $M$ es un anillo con unidad y no conmutativo respecto de las leyes de composición definidas.

b) Comprobar que si $\mathbb{K}$ es un cuerpo conmutativo, los elements de $M$ que tienen inverso están caracterizados por la condición $ad - bc \neq 0$.

c) Demostrar que el subconjunto de $M$ formado por los elementos que tienen inverso es un grupo multiplicativo.

A **9/2.** Un punto se mueve sobre los lados del triángulo $ABC$, definido por los vértices $A(-1.8, 0)$, $B(3.2, 0)$, $C(0, 2.4)$. Determinar las posiciones de dicho punto, en las que la suma de su distancia a los tres vértices es máxima o mínima absoluta.




A **9/3.** Sea un prisma hexagonal regular. ¿Cuál es la poligonal que, partiendo de un vértice de la base, recorre todas las caras laterales y acaba en el vértice de la cara superior, situado en la misma arista que el vértice de partida, y tiene longitud mínima.

A **9/4.** Se consideran en el plano los siguientes conjuntos de puntos:

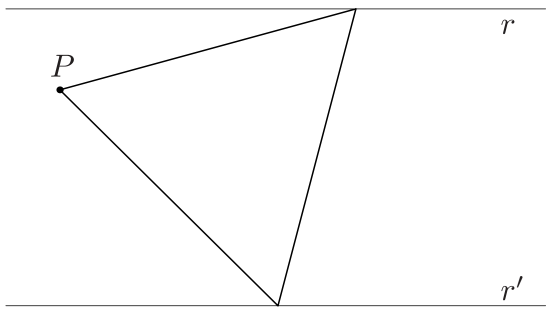
$$A = \{\text{afijos de los complejos } z \text{ tales que } \arg\big(z - (2+3i)\big) = \pi/4\},$$

$$B = \{\text{afijos de los complejos } z \text{ tales que } \operatorname{mod}\big(z - (2+i)\big) < 2\}.$$

Determinar la proyección ortogonal sobre el eje $X$ de $A \cap B$.

*Segunda sesión*

**9/5.** Dadas dos rectas paralelas $r$ y $r'$ y un punto $P$ sobre el plano que las contine y que no está sobre ellas, determinar un triángulo equilátero que tenga por vértice el punto $P$, y los otros dos, uno sobre cada una de las dos rectas.




**9/6.** Dadas tres circunferencias de radios $r$, $r'$ y $r''$, cada una tangente exteriormente a las otras dos, calcular el radio del círculo inscrito al triángulo cuyos vértices son los tres centros de aquellas.

**9/7.** Demostrar que para todo entero positivo $n$, el número

$$A_n = 5^n + 2 \cdot 3^{n-1} + 1$$

es múltiplo de 8.

**9/8.** Sabemos que $\mathbb{R}^3 = \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_i \in \mathbb{R}, i = 1, 2, 3\}$ es un espacio vectorial respecto de las leyes de composición

$$(x_1, x_2, x_3) + (y_1, y_2, y_3) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3),$$
$$\lambda(x_1, x_2, x_3) = (\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3), \;\; \lambda \in \mathbb{R}.$$

Consideramos el siguiente subconjunto de $\mathbb{R}^3$:

$$L = \left\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + x_2 + x_3 = 0\right\}.$$

a) Demostrar que $L$ es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$.

b) En $\mathbb{R}^3$ se define la relación siguiente

$$\overline{x} \mathcal{R} \overline{y} \iff \overline{x} - \overline{y} \in L; \quad \overline{x}, \overline{y} \in \mathbb{R}^3.$$

Demostrar que se trata de una relación de equivalencia.

c) Hallar dos vectores de $\mathbb{R}^3$ que pertenezcan a la misma clase que el vector $(-1, 3, 2)$.

---

**Premiados:** Josep Gelonch Anyé, José I. Querol Bravo, José Bonet Solves.

*Primera sesión*

A **10/1.** Dada la sucesión $(a_n)$, en la que

$$a_n = \frac{1}{4}n^4 - 10n^2(n-1), \quad \text{con} \quad n = 0, 1, 2 \ldots$$

determinar el término menor de la sucesión.

A **10/2.** Determinar todas las soluciones del sistema

$$\begin{cases} 2x - 5y + 11z - 6 = 0 \\ -x + 3y - 16z + 8 = 0 \\ 4x - 5y - 83z + 38 = 0 \\ 3x + 11y - z + 9 > 0 \end{cases}$$

en el que las tres primeras son ecuaciones y la última una inecuación lineal.

A **10/3.** Se considera en el plano complejo la sucesión $(a_n)$ de números complejos, en la que es:

$$a_0 = 1, \text{ y } a_n = a_{n-1} + \frac{1}{n}\big(\cos 45^\circ + i \operatorname{sen} 45^\circ\big)^n.$$

Probar que la sucesión de las partes reales de los términos de $(a_n)$ es convergente y su límite es un número comprendido entre $0.85$ y $1.15$.

A **10/4.** Sean $C$ y $C'$ dos circunferencias concéntricas de radios $r$ y $r'$ respectivamente. Determinar cuánto ha de valer el cociente $r'/r$ para que en la corona limitada por $C$ y $C'$ existan ocho circunferencias $C_i$, $i = 1, \ldots, 8$, que sean tangentes a $C$ y a $C'$, y también que $C_i$ sea tangente a $C_{i+1}$ para $i = 1, \ldots, 7$ y $C_8$ tangente a $C_1$.

*Segunda sesión*

A **10/5.** Se considera el conjunto de todos los polinomios de grado menor o igual que 4 con coeficientes racionales.

a) Probar que tiene estructura de espacio vectorial sobre el cuerpo de los números racionales.

b) Probar que los polinomios $1$, $x-2$, $(x-2)^2$, $(x-2)^3$ y $(x-2)^4$ forman una base de este espacio.

c) Expresar el polinomio $7+2x-45x^2+3x^4$ en la base anterior.

**10/6.** Se considera un triángulo equilátero de altura 1. Para todo punto $P$ del interior del triángulo, se designan por $x$, $y$, $z$ las distancias del punto $P$ a los lados del triángulo.

a) Probar que para todo punto $P$ interior del triángulo se cumple que $x+y+z=1$.

b) ¿Para qué puntos del triángulo se cumple que la distancia a un lado es mayor que la suma de las distancias a los otros dos?

c) Tenemos una barra de longitud 1 y la rompemos en tres trozos. Hallar la probabilidad de que con estos trozos se pueda formar un triángulo.

**10/7.** En el plano se consideran los dos puntos $P(8,2)$ y $Q(5,11)$. Un móvil se desplaza de $P$ a $Q$ según un camino que ha de cumplir las condiciones seguientes: El móvil parte de $P$ y llega a un punto del eje $x$, a lo largo del cual recorre un segmento de longitud 1; después se separa de este eje y se dirige hacia un punto del eje $y$, sobre el cual recorre un segmento de longitud 2; se separa del eje $y$ finalmente y va hacia el punto $Q$. Entre todos los caminos posibles, determinar el de longitud mínima, así como esta misma longitud.

**10/8.** En un espacio euclidiano de tres dimensiones se designan por $u_1$, $u_2$, $u_3$ los tres vectores unitarios ortogonales sobre los ejes $x, y, z$, respectivamente.

a) Probar que el punto $P(t)=(1-t)u_1+(2-3t)u_2+(2t-1)u_3$ , donde $t$ toma todos los valores reales, describe una recta (que designaremos por $L$).

b) ¿Qué describe el punto $Q(t)=(1-t^2)u_1+(2-3t^2)u_2+(2t^2-1)u_3$ si $t$ toma todos los valores reales?

c) Hallar un vector paralelo a $L$.

d) ¿Para qué valores de $t$ está el punto $P(t)$ sobre el plano $2x+3y+2z+1=0$?

e) Hallar la ecuación cartesiana del plano paralelo al anterior y que contenga el punto $P(3)$.

f) Hallar la ecuación cartesiana del plano perpendicular a $L$ que contenga el punto $P(2)$.

---

**Premiados:** Antonio García Fernández, Miguel Castaño Gracia, Enrique Frau Picó.

# 1973-74 XI Olimpiada Matemática Española 11

*Primera sesión*

**11/1.** Se sabe que un dodecaedro regular es un poliedro regular con 12 caras pentagonales iguales y concurriendo 3 aristas en cada vértice. Se pide calcular, razonadamente,

a) el número de vértices,

b) el número de aristas,

c) el número de diagonales de todas las caras,

d) el número de segmentos rectilíneos determinados por cada dos vértices,

d) el número de diagonales del dodecaedro.

**11/2.** En un disco metálico se quita un sector circular, de modo que con la parte restante se pueda formar un vaso cónico de volumen máximo. Calcular, en radianes, el ángulo del sector que se quita.

**11/3.** Designaremos por $Z_{(5)}$ un cierto subconjunto del conjunto $\mathbb{Q}$ de los númeross racionales. Un racional pertenece a $Z_{(5)}$ si y sólo si existen fracciones pertenecientes a este racional tales que 5 no sea divisor de su denominador. (Por ejemplo, el número racional $13/10$ no pertenece a $Z_{(5)}$, ya que el denominador de todas las fracciones iguales a $13/10$ es un múltiplo de 5. En cambio, el racional $75/10$ pertenece a $Z_{(5)}$ ya que $75/10 = 15/12$).

Contestar razonadamente las siguientes cuestiones:

a) ¿Qué estructura algebraica (semigrupo, grupo, etc.) tiene $Z_{(5)}$ respecto de la suma?

b) ¿Y respecto del producto?

c) ¿Es $Z_{(5)}$ un subanillo de $\mathbb{Q}$?

d) ¿Es $Z_{(5)}$ un $Z_{(5)}$-espacio vectorial?

**11/4.** Los tres lados de un triángulo equilátero se suponen reflectantes (excepto en los vértices), de forma que reflejen hacia dentro del triángulo los rayos de luz situados en su plano, que incidan sobre ellos y que salgan de un punto interior del triángulo.

Determinar el recorrido de un rayo de luz que, partiendo de un vértice del triángulo alcance a otro vértice del mismo después de reflejarse sucesivamente en los tres lados. Calcular la longitud del camino seguido por la luz suponiendo que el lado del triángulo mide 1 m.

*Segunda sesión*

**11/5.** Sea $(G, \cdot)$ un grupo y $e$ un elemento neutro. Probar que si todos los elementos $x$ de $G$ cumplen

$$x \cdot x = e$$

entonces $(G, \cdot)$ es abeliano (o sea, conmutativo).

**11/6.** En una circunferencia de radio igual a la unidad se trazan dos cuerdas, $AB$ y $AC$ de igual longitud.

a) Averiguar cómo se puede construir una tercera cuerda $DE$ que quede dividida en tres partes iguales por las intersecciones con $AB$ y $AC$.

b) Si $AB = AC = \sqrt{2}$, ¿cuánto valen las longitudes de los dos segmentos que la cuerda $DE$ determina sobre $AB$?

**11/7.** Un depósito tiene forma de prisma exagonal regular, cuyas bases son de 1 m de lado y su altura es de 10 m. Se situan las aristas laterales en posición oblicua y se llena parcialmente con 9 m$^3$ de agua. El plano de la superficie libre del agua corta a todas las aristas laterales. Una de ellas queda con una parte de 2 m bajo el agua. ¿Qué parte queda bajo el agua en la arista lateral opuesta del prisma?

**11/8.** Los lados de un polígono regular convexo de $L + M + N$ lados se han de dibujar en tres colores: $L$ de ellos con trazo rojo, $M$ con trazo amarillo, y $N$ con trazo azul. Expresar, por medio de desigualdades, las condiciones necesarias y suficientes para que tenga solución (varias, en general) el problema de hacerlo sin que queden dos lados contiguos dibujados con el mismo color.

---

**Premiados:** Juan M. Sueiro Bal, Jesús Alcázar Moreno, Luis Narváez Macarro.

*Primera sesión*

A **12/1.** Calcular el límite

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left(\frac{1}{n^k} + \frac{2^k}{n^k} + \cdots + \frac{(n-1)^k}{n^k} + \frac{n^k}{n^k}\right).$$

(Para el cálculo del límite se puede seguir el procedimento de construcción de la integral).

A **12/2.** Estudiar la función real

$$f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$$

definida para $x \in \mathbb{R} - [-1, 0]$. Representación gráfica.

A **12/3.** Designaremos por $Z_{(5)}$ un cierto subconjunto del conjunto $\mathbb{Q}$ de los númeross racionales. Un racional pertenece a $Z_{(5)}$ si y sólo si existen fracciones pertenecientes a este racional tales que 5 no sea divisor de su denominador. (Por ejemplo, el número racional $13/10$ no pertenece a $Z_{(5)}$, ya que el denominador de todas las fracciones iguales a $13/10$ es un múltiplo de 5. En cambio, el racional $75/10$ pertenece a $Z_{(5)}$ ya que $75/10 = 15/12$).

Contestar razonadamente las siguientes cuestiones:

a) ¿Qué estructura algebraica (semigrupo, grupo, etc.) tiene $Z_{(5)}$ respecto de la suma?

b) ¿Y respecto del producto?

c) ¿Es $Z_{(5)}$ un subanillo de $\mathbb{Q}$?

d) ¿Es $Z_{(5)}$ un $Z_{(5)}$-espacio vectorial?

A **12/4.** Probar que si el producto de $n$ números reales y positivos es igual a 1, su suma es mayor o igual que $n$.

*Segunda sesión*

**12/5.** En el plano tenemos una recta $r$ y dos puntos $A$ y $B$ exteriores a la recta y en el mismo semiplano. Determinar un punto $M$ de la recta tal que el ángulo de $r$ con $AM$ sea doble del de $r$ con $BM$. (Considérese como ángulo de dos rectas el menor de los ángulos que forman).

**12/6.** Sean $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$ dos sucesiones de números naturales definidas como sigue:

$$\begin{array}{lll} x_1 = 1, \quad x_2 = 1, & x_{n+2} = x_{n+1} + 2x_n \quad \text{para} & n = 1, 2, 3, \ldots \\ y_1 = 1, \quad y_2 = 7, & y_{n+2} = 2y_{n+1} + 3y_n \quad \text{para} & n = 1, 2, 3, \ldots \end{array}$$

Demostrar que, salvo el caso $x_1 = y_1 = 1$, no existe ningún valor natural que se presente en las dos sucesiones.

**12/7.** Se considera la función real definida por

$$f(x) = \frac{1}{|x+3| + |x+1| + |x-2| + |x-5|}$$

para todo $x \in \mathbb{R}$.

a) Determinar su máximo.

b) Representación gráfica.

**12/8.** Se eligen aleatoriamente dos números reales entre 0 y 1. Calcular la probabilidad de que uno cualquiera de ellos sea menor que el cuadrado del otro.

---

**Premiados:** Agustín Llerena Achutegui, Federico Cuco Pardillos, Enrique Uzabal Amores.

*Primera sesión*

A

**13/1.** En un plano se dan cuatro puntos fijos $A$, $B$, $C$, $D$ no alineados tres a tres. Construir un cuadrado de lados $a$, $b$, $c$, $d$ de forma que $A \in a$, $B \in b$, $C \in c$, $D \in d$.

A

**13/2.** Se considera el conjunto $C$ de todas las $r$-plas cuyas componentes son $1$ o $-1$. Calcular la suma de todas las componentes de todos los elementos de $C$ excluyendo la $r$-pla $(1, 1, 1, \dots, 1)$.

A

**13/3.** A través de una lente que invierte la imagen miramos el espejo retrovisor de nuestro coche. Si en él se refleja la matrícula del coche que nos sigue, `CS-3965-EN`, dibujar la imagen que nosotros recibimos. Dibujar también la obtenida permutando las anteriores transformaciones, es decir, reflejando en el retrovisor la imagen que de la matrícula da la lente. ¿Es conmutativo el producto de ambas transformaciones, la reflexión en el espejo y la refracción a través de la lente?

A

**13/4.** Demostrar que la expresión

$$\frac{n^5 - 5n^3 + 4n}{n + 2}$$

donde $n$ es un entero cualquiera, es siempre divisible por 24.

*Segunda sesión*

**13/5.** Demostrar que la ecuación

$$z^4 + 4(i+1)z + 1 = 0$$

tiene una raíz en cada cuadrante del plano complejo.

**13/6.** Dada una matriz cuadrada $M$ de orden $n$ sobre el cuerpo de los números reales, encontrar, en función de $M$, dos matrices, una simétrica y una antisimétrica, tales que su suma sea precisamente $M$.

**13/7.** El precio de un diamante es proporcional al cuadrado de su peso. Demostrar que, rompiéndolo en dos partes, existe una depreciación de su valor. ¿Cuándo es máxima la depreciación?

**13/8.** Se da la función

$$y = \left| x^2 - 4x + 3 \right| .$$

Estudiar su continuidad y derivabilidad en el punto de abcisa $1$. Su gráfica determina con el eje $X$ una figura cerrada. Determinar el área de dicha figura.

---

**Premiados:** Serafín Moral Callejón, Antonio J. Rodríguez de la Cruz, Antonio Barreiro Blas.

*Primera sesión*

A **14/1.** Dado el determinante de orden $n$

$$\begin{vmatrix} 8 & 3 & 3 & \dots & 3 \\ 3 & 8 & 3 & \dots & 3 \\ 3 & 3 & 8 & \dots & 3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 3 & 3 & 3 & \dots & 8 \end{vmatrix}$$

calcular su valor y determinar para qué valores de $n$ dicho valor es múltiplo de 10.

A **14/2.** Demostrar que todas las matrices cuadradas de la forma (con $a, b \in \mathbb{R}$),

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$$

forman un cuerpo conmutativo $\mathbb{K}$ cuando se consideran las operaciones de suma y producto de matrices.

Probar también que si $A \in \mathbb{K}$ es un elemento de dicho cuerpo, existen dos matrices de $\mathbb{K}$ tales que el cuadrado de cada una sea igual a $A$.

A **14/3.** Demostrar que en una reunión de 285 personas, una al menos de ellas ha dado un número par de apretones de mano (0 se considera un número par y corresponde a un asistente que no estrecha ninguna mano).

A **14/4.** Demostrar que la suma de los cuadrados de cinco enteros consecutivos no puede ser un cuadrado perfecto.

*Segunda sesión*

**14/5.** Utilizando una escalera mecánica para bajar a la estación del Metro y andando con paso regular, observo que necesito 50 escalones para bajar. Si luego vuelvo a subirla corriendo, a una velocidad 5 veces mi paso normal anterior, compruebo que necesito 125 escalones para llegar arriba. ¿Cuántos escalones visibles tiene la escalera mecánica cuando se encuentra parada?

**14/6.** Se considera un triángulo $ABC$, y sea $D$ el punto de corte de la bisectriz correspondiente al ángulo $A$ con el lado $BC$. Demostrar que la circunferencia que pasa por $A$ y es tangente a la recta $BC$ en $D$, también es tangente a la circunferencia circunscrita al triángulo $ABC$.

**14/7.** Se dan los números $A_1$, $A_2$, ..., $A_n$. Demostrar, sin necesidad de calcular derivadas, que el valor de $X$ que hace mínima la suma

$$(X - A_1)^2 + (X - A_2)^2 + \cdots + (X - A_n)^2$$

es precisamente la media aritmética de los números dados.

**14/8.** Determinar una condición necesaria y suficiente para que los afijos de tres números complejos $z_1$, $z_2$ y $z_3$ sean los vértices de un triángulo equilátero.

---

**Premiados:** Alberto Elduque Palomo, Francisco J. Palma Molina, José Peña Gamarra.

*Primera sesión. Junio de 1979.*

A

**15/1.** Calcular el área de la intersección del interior de la elipse

$$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}=1$$

con el círculo limitado por la circunferencia $(x-2)^2+(y-1)^2=5$.

A

**15/2.** Cierto profesor de Oxford, destinado a los servicios de criptografía del espionaje británico, papel interpretado por Dirk Bogarde en una película, recluta su personal proponiendo pequeños ejercicios de atención, como leer mentalmente una palabra al revés. Frecuentemente lo hace con su propio nombre: SEBASTIAN, que habrá que leer NAITSABES.

Se pregunta si hay algún movimiento del plano o del espacio que transforme una de estas palabras en la otra, tal como aparecen escritas. ¿Y si se hubiera llamado AVITO, como un cierto personaje de Unamuno? Explíquese razonadamente cada respuesta.

A

**15/3.** Demostrar la igualdad

$$\binom{n}{0}^2+\binom{n}{1}^2+\binom{n}{2}^2+\cdots+\binom{n}{n}^2=\binom{2n}{n}.$$

A

**15/4.** Si $z_1$, $z_2$ son las raíces de la ecuación con coeficientes reales $z^2+az+b=0$, probar que $z_1^n+z_2^n$ es un número real para cualquier valor natural de $n$. En el caso particular de la ecuación $z^2-2z+2=0$, expresar, en función de $n$, dicha suma.

**Nota:** *Durante el curso 1977-78 no se celebró Olimpiada Matemática.*

*Segunda sesión. Junio de 1979.*

A

**15/5.** Calcular la integral definida

$$\int_2^4 \operatorname{sen}\left((x-3)^3\right)dx.$$

A

**15/6.** Una urna se llenó con tres bolas por el siguiente procedimento: se lanzó una moneda tres veces, introduciendo, cada vez que salió cara una bola blanca, y cada vez que salió cruz, una bola negra. Extraemos de esta urna, por cuatro veces consecutivas, una bola; la devolvemos a la urna antes de la extracción siguiente. ¿Cuál es la probabilidad de que en las cuatro extracciones se obtenga bola blanca?

A

**15/7.** Probar que el volumen de un neumático (toro) es igual al volumen de un cilindro cuya la base es una sección meridiana de aquél y que tiene por altura la longitud de la circunferencia formada por los centros de las secciones meridianas.

A

**15/8.** Dado el polinomio

$$P(x) = 1 + 3x + 5x^2 + 7x^3 + \cdots + 1001x^{500},$$

expresar el valor numérico de su derivada de orden 325 para $x = 0$.

---

**Premiados:** Carles Casacuberta Vergés, Jesús Nievas Espuelas, Jorge Mas Trullenque.

*Primera sesión.*

A **16/1.** De entre los triángulos que tienen un lado de 5 m de longitud y el ángulo opuesto de $30°$, determinar el de área máxima, calculando el valor de los otros dos ángulos y el área del triángulo.

A **16/2.** Una urna contiene los votos para la elección de dos candidatos $A$ y $B$. Se sabe que el candidato $A$ cuenta con 6 votos y el candidato $B$ con 9. Hallar la probabilidad de que, al efectuar el escrutinio, siempre vaya por delante el candidato $B$.

A **16/3.** Demostrar que si $a_1, a_2, \ldots, a_n$ son números reales positivos, entonces

$$(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}\right) \geq n^2.$$

¿Cuándo es válida la igualdad?

A **16/4.** Hallar la función $f(x)$ que cumple la ecuación

$$f'(x) + x^2 f(x) = 0$$

sabiendo que $f(1) = e$. Representar gráficamente esta función y calcular la tangente en el punto de la curva de abscisa 1.

*Segunda sesión.*

A

**16/5.** Demostrar que si $x$ es tal que

$$x + \frac{1}{x} = 2\cos\alpha$$

entonces, para todo $n = 0, 1, 2, \ldots$,

$$x^n + \frac{1}{x^n} = 2\cos n\alpha.$$

A

**16/6.** Demostrar que si al producto de cuatro números naturales consecutivos se añade una unidad, el resultado es un cuadrado perfecto.

A

**16/7.** El punto $M$ varía sobre el segmento $AB$ que mide 2 m.

a) Hallar la ecuación y la representación gráfica del lugar geométrico de los puntos del plano cuyas coordenadas, $x$, $y$, son, respectivamente, las áreas de los cuadrados de lados $AM$ y $MB$.

b) Averiguar qué clase de curva es. (Sugerencia: hacer un giro de ejes de $45°$).

c) Hallar el área del recinto comprendido entre la curva obtenida y los ejes de coordenadas.

A

**16/8.** Determinar todos los triángulos tales que las longitudes de los tres lados y su área estén dados por cuatro números naturales consecutivos.

---

**Premiados:** Guillermo Rozas Rodríguez, Pedro Carrión Rodríguez de Guzmán, José Fernando López Blázquez.

*Primera sesión. Junio de 1981.*

A **17/1.** Calcular la suma de $n$ sumandos

$$7+77+777+\cdots+7\ldots7.$$

A **17/2.** Un vaso de vidrio cilíndrico tiene 8 cm de altura y su borde 12 cm de circunferencia. En su interior, a 3 cm del borde, hay una diminuta gota de miel. En un punto de su superficie exterior, perteneciente al plano que pasa por el eje del cilindro y por la gota de miel, y situado a 1 cm de la base (o fondo) del vaso, hay una mosca. ¿Cuál es el camino más corto que la mosca debe recorrer, andando sobre la superficie del vaso, hasta la gota de miel, y qué longitud tiene dicho camino?

A **17/3.** Dadas las rectas que se cruzan $r$ y $s$, se consideran las rectas $u$ y $v$ tales que:

a) $u$ es simétrica de $r$ respecto de $s$,

b) $v$ es simétrica de $s$ respecto de $r$.

Determinar el ángulo que deben formar las rectas dadas para que $u$ y $v$ sean coplanarias.

A **17/4.** Calcular la integral

$$\int \frac{dx}{\operatorname{sen}(x-1)\,\operatorname{sen}(x-2)}.$$

Sugerencia: Cambio $\tan x = t$.

*Segunda sesión. Junio de 1981.*

**17/5.** Dado un número natural no nulo $n$, sea $f_n$ la función del intervalo cerrado $[0,1]$ en $\mathbb{R}$ definida así:

$$f_n(x) = \begin{cases} n^2x, & \text{si } 0 \le x < 1/n \\ 3/n, & \text{si } 1/n \le x \le 1. \end{cases}$$

a) Representar gráficamente la función.

b) Calcular $A_n = \int_0^1 f_n(x)\,dx$.

c) Hallar, si existe, $\lim_{n\to\infty} A_n$.

**17/6.** Demostrar que la transformación producto de la simetría de centro $(0,0)$ por la simetría de eje la recta de ecuación $x = y+1$, puede expresarse como producto de una simetría de eje la recta $e$ por una traslación de vector $\vec{v}$, con $e$ paralela a $\vec{v}$. Determinar una recta $e$ y un vector $\vec{v}$ que cumplan las condiciones indicadas. ¿Han de ser únicos $e$ y $\vec{v}$?

**17/7.** En una fábrica de bolas de tenis hay 4 máquinas $m_1$, $m_2$, $m_3$, $m_4$, que producen, respectivamente, el $10\%$, $20\%$, $30\%$ y $40\%$ de las bolas que salen de la fábrica. La máquina $m_1$ introduce defectos en un $1\%$ de las bolas que fabrica, la máquina $m_2$ en el $2\%$, la $m_3$ en el $4\%$ y la $m_4$ en el $15\%$. De las pelotas fabricadas en un dia, se elige una al azar y resulta ser defectuosa. ¿Cuál es la probabilidad de que esta bola haya sido elaborada por la máquina $m_3$?

**17/8.** Si $a$ es un número impar, demostrar que

$$a^4 + 4a^3 + 11a^2 + 6a + 2$$

es una suma de tres cuadrados y que es divisible por 4.

---

**Premiados:** Pablo Álvarez Royo-Villanova, Fernando Barbero González, Fernando Etayo Gordejuela.

*Primera sesión. Junio de 1982.*

A

**18/1.** En la página de pasatiempos de un periódico se propone este problema: “Dos niños, Antonio y José, tienen 160 tebeos. Antonio cuenta los suyos de 7 en 7 y le sobran 4. José cuenta los suyos de 8 en 8 y también le sobran 4. ¿Cuántos tebeos tiene cada uno?” En el siguiente número del periódico se da esta solución: “Antonio tiene 60 tebeos y José tiene 100.” Analiza esta solución e indica qué haría un matemático con este problema.

A

**18/2.** Al componer una simetría de eje $r$ con un giro de ángulo recto alrededor de un punto $P$ que no pertenece a la recta, resulta otro movimiento $M$.
¿Es $M$ una simetría axial? ¿Hay alguna recta invariante por $M$?

A

**18/3.** Se lanza un cohete y alcanza los 120 m de altura; en la caída pierde 60 m, a continuación recupera 40 m, vuelve a perder 30, gana 24, pierde 20, etc.
Si el proceso sigue indefinidamente, ¿a qué altura tiende a estabilitzarse?

A

**18/4.** Determinar un polinomio de coeficientes reales no negativos que cumpa las dos condiciones siguientes:

$$p(0) = 0, \qquad p\big(|z|\big) \leq x^4 + y^4,$$

siendo $|z|$ el módulo del número complejo $z = x + iy$.

*Segunda sesión. Junio de 1982.*

**18/5.** Construir un cuadrado conociendo la suma de la diagonal y el lado.

**18/6.** Demostrar que si $u$, $v$ son números reales no negativos cualesquiera, y $a$, $b$ números reales positivos tales que $a+b=1$, entonces

$$u^a\, v^b \le au + bv.$$

**18/7.** Sea $S$ el subconjunto de números racionales que pueden escribirse en la forma $a/b$, donde $a$ es un entero cualquiera y $b$ un entero impar. ¿Pertenece a $S$ la suma de dos de sus elementos? ¿Y el producto? ¿Hay en $S$ elementos cuyo inverso pertenezca a $S$?

**18/8.** Dado un conjunto $C$ de puntos del plano, se llama distancia de un punto $P$ del plano al conjunto $C$ a la menor de las distancias de $P$ a cada uno de los puntos de $C$. Sean los conjuntos $C=\{A,B\}$, con $A=(1,0)$ y $B=(2,0)$; y $C'=\{A',B'\}$ con $A'=(0,1)$ y $B'=(0,7)$, en un sistema de referencia ortogonal.
Hallar y dibujar el conjunto $M$ de puntos del plano que equidistan de $C$ y $C'$.
Estudiar si es derivable la función cuya gráfica es el conjunto $M$ antes obtenido.

**Premiados:** Javier Caballero Guerrero, José Sánchez Lacuesta, Patrik Simonetta.

*Primera sesión. Febrero de 1983.*

A **19/1.** Mientras Teofrasto hablaba con Aristóteles sobre la clasificación de las plantas, tenía un perro atado a una columna cilíndrica perfectamente lisa de radio $r$, con una cuerda muy fina que envolvía la columna y con un lazo. El perro tenía el extremo libre de la cuerda cogido a su cuello. Al intentar alcanzar a Teofrasto, puso la cuerda tirante y ésta se rompió. Averiguar a qué distancia de la columna estaba el nudo en el momento de romperse la cuerda.

A **19/2.** Construir un triángulo conociendo un ángulo, la razón de los lados que lo forman y el radio del círculo inscrito.

A **19/3.** Una semicircunferencia de radio $r$ se divide en $n+1$ partes iguales y se une un punto cualquiera $k$ de la división con los extremos de la semicircunferencia, formándose así un triángulo $A_k$. Calcular el límite, cuando $n$ tiende a infinito, de la media aritmética de las áreas de los triángulos.

A **19/4.** Determinar el número de raíces reales de la ecuación

$$16x^5 - 20x^3 + 5x + m = 0.$$

*Segunda sesión. Febrero de 1983.*

A

**19/5.** Hallar las coordenadas de los vértices de un cuadrado $ABCD$, sabiendo que $A$ está sobre la recta $y - 2x - 6 = 0$, $C$ en $x = 0$ y $B$ es el punto $(a, 0)$, siendo

$$a = \log_{2/3}(16/81).$$

A

**19/6.** En una cafetería, un vaso de limonada, tres bocadillos y siete bizcochos han costado 1 chelín y 2 peniques; y un vaso de limonada, cuatro bocadillos y 10 bizcochos valen 1 chelín y 5 peniques. Hallar el precio de:

a) un vaso de limonada, un bocadillo y un bizcocho;

b) dos vasos de limonada, tres bocadillos y cinco bizcochos.

(1 chelín = 12 peniques).

A

**19/7.** Un tetraedro regular de arista 30 cm descansa sobre una de sus caras. Suponiéndolo hueco, se le echan 2 litros de agua. Se pide la altura que alcanza el líquido y el área de la superficie libre del agua.

A

**19/8.** En 1960, el mayor de tres hermanos tiene una edad que es la suma de las de sus hermanos más pequeños. Unos años después, la suma de las edades de dos de los hermanos es doble de la del otro. Ha pasado ahora un número de años desde 1960, que es igual a dos tercios de la suma de las edades que los tres hermanos tenían en ese año, y uno de ellos ha alcanzado los 21 años. ¿Cuál es la edad de cada uno de los otros dos?

---

**Premiados:** Josep Burillo Puig, Roberto Selva Gomis, Francisco J. Díez Vegas, José Marañón Mora.

*Primera sesión. Febrero de 1984.*

A **20/1.** En una posición $O$ de un aeropuerto de campaña está emplazado un cañón que puede girar $360°$. Dos tanques atacan dicho lugar siguiendo trayectorias rectas $AB$ y $CD$ dadas. Hallar gráficamente el alcance del cañón sabiendo que la suma de los trozos de trayectorias de ambos tanques en los cuales éstos están bajo el fuego del cañón, es una longitud conocida $\ell$.

A **20/2.** Determinar un número de cinco cifras tal que su cuadrado termine en las mismas cinco cifras colocadas en el mismo orden.

A **20/3.** Dados dos números reales positivos $p$, $q$ tales que $p+q=1$, y sabiendo que todo par de números reales $x, y$ cumple $(x-y)^2 \geq 0$, se pide demostrar

a) $$\frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy}$$

b) $$\frac{x^2+y^2}{2} \geq \left(\frac{x+y}{2}\right)^2$$

a) $$\left(p+\frac{1}{p}\right)^2 + \left(q+\frac{1}{q}\right)^2 \geq \frac{25}{2}$$

A **20/4.** Calcular
$$\lim_{n\to\infty} \cos\frac{x}{2} \cdot \cos\frac{x}{2^2} \cdots \cos\frac{x}{2^n}.$$

*Segunda sesión. Febrero de 1984.*

A

**20/5.** Llévense arcos iguales $AB = A'B' = x$ sobre dos circunferencias iguales a partir de dos puntos fijos $A$, $A'$ sobre cada una de ellas. Hallar el lugar geométrico de los puntos medios del segmento $BB'$ al variar $x$:

a) cuando los arcos se llevan en el mismo sentido,

b) cuando los arcos se llevan en sentidos opuestos.

A

**20/6.** Se considera una circunferencia $\gamma$ de centro $(3,0)$ y radio 3, y la recta $r$ paralela al eje $Ox$ y que dista 3 del origen. Se traza una recta variable por el origen que corta a $\gamma$ en el punto $M$ y corta a la recta $r$ en $P$. Determinar el lugar geométrico de los puntos de intersección de las paralelas a $Ox$ y $Oy$ trazadas por $M$ y $P$ respectivamente.

A

**20/7.** Se consideran los números naturales escritos en el sistema de base 10.

a) Encontrar el menor número que al suprimirle la primera cifra quede reducido a su quinta parte. ¿De qué forma son todos los números que tienen esta propiedad?

b) Demostrar que no existe ningún número que al suprimirle la primera cifra quede dividido por 12.

c) Formular un criterio general que nos permita afirmar cuando un número queda dividido por $k$ al suprimir su primera cifra.

A

**20/8.** Hallar el resto de la división por $x^2 - 1$ del determinante

$$\begin{vmatrix} x^3+3x & 2 & 1 & 0 \\ x^2+5x & 3 & 0 & 2 \\ x^4+x^2+1 & 2 & 1 & 3 \\ x^5+1 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}.$$

---

**Premiados:** Pablo Novaes Ledieu, Andrés García Parrilla, Miguel Aparisi Botella, Gonzalo Génova Fuster, Agustín Rafael Tejera Gómez, Miguel Brandt Sanz.

# 1984-85 XXI Olimpiada Matemática Española 21

*Primera sesión. Febrero de 1985.*

**21/1.** Sea $\mathcal{P}$ el conjunto de los puntos del plano y $f : \mathcal{P} \to \mathcal{P}$ una aplicación que cumple las tres condiciones siguientes:

a) $f$ es biyectiva.

b) Para cada recta $r$ del plano, $f(r)$ es una recta.

c) Para cada recta $r$, la recta $f(r)$ es paralela o coincidente con $r$.

¿Qué posibles transformaciones pueden ser $f$?

**21/2.** Sea $\mathbb{Z}$ el conjunto de los enteros y $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ el conjunto de pares ordenados de enteros. La suma de estos pares se define por

$$(a, b) + (a', b') = (a + a', b + b'),$$

siendo $(-a, -b)$ el opuesto de $(a, b)$.

Estudiar si existe un subconjunto $E$ de $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ que cumpla las condiciones siguientes:

a) La suma de dos pares de $E$ también es de $E$.

b) El par $(0, 0)$ pertenece a $E$.

c) Si $(a, b)$ no es $(0, 0)$, entonces o bien $(a, b)$ pertenece a $E$, o bien $(-a, -b)$ pertenece a $E$, pero no ambos.

**21/3.** Resolver la ecuación

$$\tan^2 2x + 2 \tan 2x \tan 3x - 1 = 0.$$

**21/4.** Consideremos tres números naturales $a$, $b$, $c$ tales que la razón

$$\frac{a + b + c}{abc}$$

sea el inverso de un número $k$ entero y positivo. Se pide demostrar:

a) $a^3 + b^3 + c^3$ no es primo.

b) Para cada $k \in \mathbb{N}$ existen ternas de naturales $a$, $b$, $c$ que cumplen las condiciones.

*Segunda sesión. Febrero de 1985.*

A **21/5.** Hallar la ecuación de la circunferencia que pasa por los afijos de las soluciones de la ecuación

$$z^3 + (-1+i)z^2 + (1-i)z + i = 0.$$

A **21/6.** Se consideran las semirrectas no alineadas $Ox$, $Oy$. Por el punto $A \in Ox$ se trazan pares de rectas $r_1$, $r_2$, antiparalelas respecto al ángulo $xOy$; sean $M$, $N$ las intersecciones de $r_1$ con $Oy$ y de $r_2$ con $Ox$, respectivamente. Sea $P$ el punto de intersección de las bisectrices de los ángulos $AMy$, $ANy$. Hallar el lugar geométrico de $P$ al variar $A$.

A **21/7.** Dada la ecuación $x^5 - px - 1 = 0$, estudiar el valor de $p$ de forma que existan dos soluciones de la ecuación, $x_1$, $x_2$, que a la vez sean soluciones de $x^2 - ax + b = 0$, con $a$, $b$ enteros.

A **21/8.** Diremos que una matriz cuadrada es de *suma constante* si la suma de los elementos de cada fila, de cada columna, y de cada diagonal, son valores iguales. Análogamente, una matriz cuadrada es de *producto constante* si son iguales los productos de los elementos de cada fila, de cada columna y de cada diagonal. Determinar las matrices cuadradas de orden 3 sobre $\mathbb{R}$ que son, a la vez, de suma y de producto constante.

---

**Premiados:** Ricardo Pérez Marco, Ignacio Garijo Amilburo, Juan Acuarón Joven, Ana José Reguera López, José Luis Ansorena Barasoain, Antonio Gómez Amigo.

# 1985-86 XXII Olimpiada Matemática Española 22

*Primera sesión. Febrero de 1986.*

**22/1.** Indicaremos por $[x], \{x\}$ las partes entera y decimal del número real $x$. Definimos una *distancia* entre los números reales $x$ e $y$

$$d(x,y) = \sqrt{\left([x]-[y]\right)^2 + \left(\{x\}-\{y\}\right)^2}.$$

Determinar (como unión de intervalos) el conjunto de los números reales que *distan* del número $3/2$ menos de $202/100$.

**22/2.** Un segmento $d$ divide al segmento $s$ si existe un natural $n$ tal que

$$nd = d + d + \overset{n}{\smile}\!\!\!\!\cdots + d = s.$$

a) Demostrar que si el segmento $d$ divide a los segmentos $s$ y $s'$ con $s < s'$, entonces divide al segmento diferencia $s' - s$.
b) Demostrar que ningún segmento divide al lado $s$ y a la diagonal $s'$ de un pentágono regular (razonar sobre el pentágono regular cuyos lados están contenidos en las diagonales del pentágono dado, sin efectuar cálculos numéricos).

**22/3.** Hallar los valores de $n \in \mathbb{N}$ tales que $5^n + 3$ es una potencia de 2 de exponente natural.

*Segunda sesión. Febrero de 1986.*

A

**22/4.** Indicamos por $m(a,b)$ la media aritmética de los números reales positivos $a$ y $b$. Dada la función real positiva $g$ que tiene la primera y la segunda derivada positivas, definimos la *media* $\mu(a,b)$ relativa a la función $g$ mediante

$$2\,g\big(\mu(a,b)\big) = g(a) + g(b).$$

Decir, razonadamente, cuál de las dos medias $m$ y $\mu$ es mayor.

A

**22/5.** Consideramos la curva $\Gamma$ definida por la ecuación $y^2 = x^3 + bx + b^2$, donde la constante $b$ es un número racional no nulo. Inscribir en la curva $\Gamma$ un triángulo cuyos vértices tengan coordenadas racionales.

A

**22/6.** Calcular

$$\prod_{k=1}^{14} \cos\left(\frac{k\pi}{15}\right).$$

---

**Premiados:** Carlos Ueno Jacue, Alberto Garrido Arribas, Juan David González Cobas, Jaume Amorós Torrent, Joaquim Ortega Cerdà, Juan Cuenca González.

*Primera sesión. Febrero de 1987.*

A

**23/1.** Sean $a$, $b$, $c$ las longitudes de los lados de un triángulo no isósceles. Se dan tres círculos concéntricos de radios $a$, $b$ y $c$.
a) ¿Cuántos triángulos equiláteros de áreas distintas pueden construirse, de modo que las rectas que contienen sus lados sean tangentes a cada círculo?
b) Hallar las superficies de estos triángulos.

A

**23/2.** Demostrar que para todo número natural $n > 1$ se cumple

$$1 \cdot \sqrt{\binom{n}{1}} + 2 \cdot \sqrt{\binom{n}{2}} + \cdots + n \cdot \sqrt{\binom{n}{n}} < \sqrt{2^{n-1} n^3}.$$

A

**23/3.** Un triángulo dado $T$ se descompone en triángulos $T_1$, $T_2$, ..., $T_n$ de manera que:
a) Ningún par de triángulos $T_i$ tiene puntos interiores comunes.
b) La unión de todos los triángulos $T_i$ es $T$.
c) Cada segmento que es lado de algún triángulo $T_i$, o bien es lado de otro triángulo $T_j$, o bien es lado del triángulo $T$.
Sean $s$ el número total de lados (cada uno contado una sola vez, aunque sea común a dos triángulos), y $v$ el número total de vértices (cada uno contado una sola vez, aunque sea común a varios triángulos).
Demostrar que si $n$ es impar, existen varias descomposiciones de esta clase, y todas tienen el mismo número $v$ de vértices y el mismo número $s$ de lados. Expresar $v$ y $s$ en función de $n$. Demostrar también que si $n$ es par no existe tal descomposición.

*Segunda sesión. Febrero de 1987.*

**23/4.** Si $a$ y $b$ son dos números reales diferentes, resolver el sistema

$$x + y = 1$$
$$(ax + by)^2 \leq a^2x + b^2y.$$

Resolver también el sistema

$$x + y = 1$$
$$(ax + by)^4 \leq a^4x + b^4y.$$

**23/5.** En un triángulo $ABC$ tenemos puntos $D$ y $E$ respectivamente sobre $AB$ y $AC$. Conocemos la medida de los ángulos indicados a continuación: $\widehat{ABE} = 30°$, $\widehat{EBC} = 50°$, $\widehat{ACD} = 20°$ y $\widehat{DCB} = 60°$. Hallar el valor del ángulo $\widehat{EDC}$.

**23/6.** Para cada número natural $n$ se considera el polinomio

$$P_n(x) = x^{n+2} - 2x + 1.$$

a) Demostrar que la ecuación $P_n(x) = 0$ tiene una raíz $c_n$ y sólo una en el intervalo $(0, 1)$.
b) Calcular

$$\lim_{n\to\infty} c_n.$$

---

**Premiados:** Fernando Galve Mauricio, Salvador Villegas Barranco, Santiago Vila Doncel, Juan R. Valderrama Alcalde, Pablo Benítez Giménez, Carlos J. Pérez Jiménez.

*Primera sesión. Febrero de 1988.*

A **24/1.** Sea $(x_n)$, $n \in \mathbb{N}$, una sucesión de números enteros tal que

$$x_1 = 1,$$
$$x_{n+1} > x_n, \text{ para } n \geq 1,$$
$$x_{n+1} \leq 2n, \text{ para } n \geq 1.$$

Demostrar que para todo entero natural $k$ existen dos términos de la sucesión $x_r$ y $x_s$ tales que $x_r - x_s = k$.

A **24/2.** Sobre una circunferencia se eligen $n > 3$ puntos y se numeran de 1 a $n$ en cualquier orden. Diremos que dos puntos no consecutivos $a$ y $b$ están relacionados si en uno de los dos arcos de extremos $a$ y $b$, todos los puntos están marcados con números menores que las marcas de $a$ y $b$.
Demostrar que el número de pares de puntos relacionados es exactamente $n-3$.

A **24/3.** Probar que los binomios $25x + 31y$ y $3x + 7y$ son múltiplos de 41 para los mismos valores de $x$ e $y$.

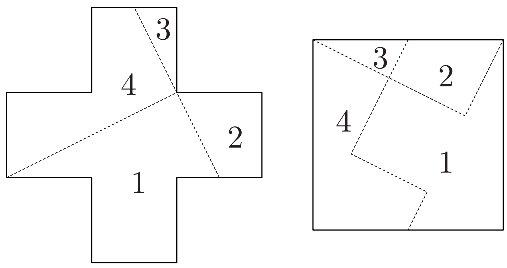
*Segunda sesión. Febrero de 1988.*

**24/4.** Se atribuye al matemático renacentista Leonardo da Pisa (más conocido como Fibonacci) la sucesión definida de la manera siguiente

$$
\begin{aligned}
a_1 &= 1,\\
a_2 &= 1,\\
a_i &= a_{i-1} + a_{i-2} \quad \text{para} \quad i > 2.
\end{aligned}
$$

Expresar $a_{2n}$ en función solamente de los tres términos $a_{n-1}$, $a_n$, $a_{n+1}$.

**24/5.** Es muy conocido el *puzzle* consistente en descomponer la cruz griega de la izquierda de la figura en cuatro partes con las que se pueda componer un cuadrado. Una solución habitual es la de la figura de la derecha. Demostrar que hay una infinidad de soluciones diferentes.




¿Hay alguna solución que de lugar a cuatro partes iguales?

**24/6.** Calcular, para cualquier valor del parámetro entero $t$, soluciones enteras $x$, $y$ de la ecuación

$$y^2 = x^4 - 22x^3 + 43x^2 + 858x + t^2 + 10452(t + 39).$$

---

**Premiados:** Javier Campins Pascual, Ramón Esteban Romero, Santiago Pérez-Cacho Fernando-Argüelles, José Ignacio Nogueira Coriba, Boris Bartolomé Mana, Fernando Martínez Puente.

*Primera sesión. Febrero de 1989.*

A

**25/1.** El programa de una asignatura consta de $n$ preguntas; el examen consiste en desarrollar una de esas preguntas, elegida al azar. Un alumno sólo se sabe una pregunta, pero puede repetir el examen $n$ veces. Expresar, en función de $n$, la probabilidad $p_n$ de que el alumno apruebe el examen. ¿Crece o decrece $p_n$ al aumentar $n$? Calcular

$$\lim_{n\to\infty} p_n.$$

¿Cuál es la mayor de las cotas inferiores de las probabilidades $p_n$?

A

**25/2.** Los puntos $A'$, $B'$, $C'$ de los lados $BC$, $CA$, $AB$ del triángulo $ABC$ cumplen

$$\frac{AC'}{C'B} = \frac{BA'}{A'C} = \frac{CB'}{B'A} = k.$$

Las rectas $AA'$, $BB'$, $CC'$ forman un triángulo $A_1B_1C_1$. Dados $k$ y el área $S$ del triángulo $ABC$, calcular el área del triángulo $A_1B_1C_1$.

A

**25/3.** Demostrar que

$$\frac{1}{10\sqrt{2}} < \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots 99}{2\cdot 4\cdot 6\cdots 100} < \frac{1}{10}.$$

*Segunda sesión. Febrero de 1989.*

**25/4.** Demostrar que el número 1989 y todas sus potencias enteras $1989^n$ se pueden escribir como suma de dos cuadrados de enteros positivos, y como mínimo, de dos formas diferentes.

**25/5.** Sea $\mathcal{D}$ el conjunto de los números complejos que se pueden escribir en la forma $a + b\sqrt{-13}$, con $a$, $b$ enteros. El número $14 = 14 + 0\sqrt{-13}$ puede escribirse como producto de dos elementos de $\mathcal{D}$: $14 = 2 \cdot 7$. Expresar 14 como producto de dos elementos de $\mathcal{D}$ de todas las formas posibles.

**25/6.** Demostrar que dados *siete* números reales cualesquiera, se pueden elegir dos, digamos $a$ y $b$, de manera que

$$\sqrt{3}\,|a-b| < |1+ab|.$$

Dar un ejemplo de *seis* números reales que no cumplan esta propiedad.

---

**Premiados:** Vicente Muñoz Velázquez, Enrique García Lopez, Alberto García Martínez, Cristina Draper Fontanales, Leandro Marín Muñoz, Javier Portela Lemos.

*Primera sesión. 16 de Marzo de 1990.*

A

**26/1.** Sean $x$ e $y$ dos números reales positivos. Probar que la expresión

$$A = \sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{xy}$$

se puede escribir en la forma

$$B = \sqrt{x} + \sqrt{y + xy + 2y\sqrt{x}}$$

y comparar los números

$$L = \sqrt{3} + \sqrt{10 + 2\sqrt{3}} \quad \text{y} \quad M = \sqrt{5 + \sqrt{22}} + \sqrt{8 - \sqrt{22} + 2\sqrt{15 - 3\sqrt{22}}}.$$

A

**26/2.** Cada punto de un plano está pintado de un color elegido entre tres distintos. ¿Existen necesariamente dos puntos de ese plano que disten 1 cm y que estén pintados del mismo color?

A

**26/3.** Se llama parte entera de un número real $a$ (y se escribe $[a]$), al mayor número entero menor o igual que $a$. Si $n$ es un número natural, demostrar que la parte entera de $(4 + \sqrt{11})^n$ es un número impar.

*Segunda sesión. 17 de Marzo de 1990.*

**26/4.** Demostrar que la suma

$$\sqrt[3]{\frac{a+1}{2}+\frac{a+3}{6}\sqrt{\frac{4a+3}{3}}}+\sqrt[3]{\frac{a+1}{2}-\frac{a+3}{6}\sqrt{\frac{4a+3}{3}}}$$

es independiente del valor de $a$, para todo valor real $a \geq -3/4$, y hallar el valor de dicha suma.

**26/5.** Tres puntos $A'$, $B'$, $C'$ están situados, respectivamente, sobre los lados $BC$, $CA$ y $AB$ de un triángulo dado $ABC$ de área $S$, de forma que

$$\frac{AC'}{AB}=\frac{BA'}{BC}=\frac{CB'}{CA}=p,$$

siendo $p$ un parámetro variable, $0<p<1$. Determinar

1) El área del triángulo $A'B'C'$ en función de $p$.

2) El valor de $p$ que minimiza el área anterior.

3) El lugar geométrico de los puntos $P$ de intersección de las paralelas trazadas por $A'$ y $C'$, repectivamente a los lados $AB$ y $AC$, cuando $p$ está entre 0 y 1.

**26/6.** Se consideran $n$ puntos del plano de forma que no existan dos parejas equidistantes. Por cada punto se traza el segmento que le une al más próximo. Demostrar que ningún punto está unido a más de cinco puntos.

---

**Premiados:** Francisco Ogando Serrano, Daniel Lasaosa Medarde, Marco Castrillón López, Javier Arregui García, José F. Herrador Barrios, José M. Gordillo Arias de Saavedra.

*Primera sesión. 15 de Febrero de 1991.*

A

**27/1.** En el plano, donde se ha tomado un sistema de referencia ortonormal, se consideran todos los puntos $(m, n)$ cuyas coordenadas son números enteros. Se suponen trazados todos los segmentos que unen pares cualesquiera de estos puntos y cuya longitud es entera. Probar que no hay dos de esos segmentos que formen un ángulo de $45°$.
Si se hace lo mismo con los puntos $(m, n, k)$ del espacio. ¿Habrá algún par de esos segmentos que formen un ángulo de $45°$?

A

**27/2.** Sean $a$ y $b$ enteros diferentes de $0$, $1$ y $-1$, y consideremos la matriz

$$\begin{pmatrix} a+b & a+b^2 & a+b^3 & \cdots & a+b^m \\ a^2+b & a^2+b^2 & a^2+b^3 & \cdots & a^2+b^m \\ a^3+b & a^3+b^2 & a^3+b^3 & \cdots & a^3+b^m \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a^n+b & a^n+b^2 & a^n+b^3 & \cdots & a^n+b^m \end{pmatrix}.$$

Determinar un subconjunto $S$ de filas de esa matriz, lo menor posible, tal que cualquier otra fila se pueda expresar como suma de las filas de $S$ multiplicadas por números enteros apropiados (es decir, como combinación lineal con coeficientes enteros de las filas de $S$). Explicitar dichas combinaciones lineales.

A

**27/3.** Supongamos que la ecuación $x^3 + px^2 + qx + r = 0$ con $r \neq 0$, admite tres raíces reales y positivas. Determinar la relación que debe ligar los números reales $p$, $q$ y $r$ a fin de que las tres raíces puedan ser las longitudes de los lados de un triángulo.

*Segunda sesión. 16 de Febrero de 1991.*

A

**27/4.** Sean $A'$, $B'$ y $C'$ los puntos de tangencia de los lados $BC$, $CA$ y $AB$ de un triángulo con su circunferencia inscrita. Sea $D$ el punto de intersección de $C'A'$ con la bisectriz del ángulo del vértice $A$. Calcular el valor del ángulo $\widehat{ADC}$.

A

**27/5.** Dado un número natural $n$, se designa por $s(n)$ la suma de las cifras del número $n$, expresado en el sistema de numeración binario, es decir, el número de cifras 1 que tiene. Determinar, para todo número natural $k$

$$\sigma(k) = s(1) + s(2) + \cdots + s(2^k).$$

A

**27/6.** Calcular la parte entera de

$$S = \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{10000}}.$$

---

**Premiados:** Ignasi Mundet Riera, Roger Espel Llima, Marcos Durántez Gamzukoff, Ignacio Uriarte Tuero, Alberto Bravo de Mansilla Jiménez, Ignacio Marcos Primo.

*Primera sesión. 14 de Febrero de 1992.*

**28/1.** Un número $N$, múltiplo de 83, es tal que su cuadrado tiene 63 divisores. Hallar $N$, sabiendo que es el menor número que cumple las condiciones anteriores.

**28/2.** Dadas dos circunferencias exteriores de radios $r$ y $r'$ $(r \neq r')$, se pide dibujar, razonadamente, una recta paralela a una dirección dada, tal que determine sobre las dos circunferencias dos cuerdas tales que la suma de sus longitudes sea igual a una longitud dada $\ell$.

**28/3.** Probar que si $a$, $b$, $c$ y $d$ son números enteros no negativos, y es

$$(a+b)^2 + 2a + b = (c+d)^2 + 2c + d, \qquad (*)$$

necesariamente debe ser $a = c$ y $b = d$.
Probar la misma conclusión si, en lugar de (*) se cumple

$$(a+b)^2 + 3a + b = (c+d)^2 + 3c + d.$$

Ver que, en cambio, existen números enteros no negativos $a \neq c$, $b \neq d$, tales que

$$(a+b)^2 + 4a + b = (c+d)^2 + 4c + d.$$

*Segunda sesión. 15 de Febrero de 1992.*

A

**28/4.** Sea la sucesión (progresión aritmética)

$$3, 7, 11, 15, \ldots$$

Demostrar que en dicha sucesión hay infinitos números primos.

A

**28/5.** Dibujado el triángulo de vértices $A$, $B$, $C$, se pide determinar gráficamente el punto $P$ tal que

$$\widehat{PAB} = \widehat{PBC} = \widehat{PCA}.$$

Expresar una función trigonométrica de este ángulo $\widehat{PAB}$ en función de las funciones trigonométricas de los ángulos $A$, $B$ y $C$.

A

**28/6.** Dados un número natural $n > 0$ y un número complejo $z = x + iy$ de módulo unidad, $x^2 + y^2 = 1$, se puede cumplir o no la igualdad

$$\left(z + \frac{1}{z}\right)^n = 2^{n-1}\left(z^n + \frac{1}{z^n}\right).$$

Fijado $n$, designaremos per $S(n)$ al subconjunto de complejos de módulo unidad para los que se cumple la igualdad dada. Se pide

a) Calcular razonadamente $S(n)$, para $n = 2, 3, 4, 5$.

b) Acotar superiormente el número de elementos de $S(n)$ en función de $n$, para $n > 5$.

---

**Premiados:** Álvaro Begué Aguado, Javier Ribón Herguedas, José Miguel Atienza Riera, Raquel Barco Moreno, Vicente Giner Bosch, Manuel M. Aguado Martínez.

*Primera sesión. 26 de Febrero de 1993.*

**29/1.** En una reunión hay 201 personas de 5 nacionalidades diferentes. Se sabe que, en cada grupo de 6, al menos 2 tienen la misma edad. Demostrar que hay al menos 5 personas del mismo país, de la misma edad y del mismo sexo.

**29/2.** Escrito el triángulo aritmético

$$\begin{array}{ccccccccccccccccc}
0 & & 1 & & 2 & & 3 & & 4 & & \dots & & 1991 & & 1992 & & 1993 \\
 & 1 & & 3 & & 5 & & 7 & & \dots & & & & 3983 & & 3985 & \\
 & & 4 & & 8 & & 12 & & \dots & & & & & & 7968 & & \\
 & & & & & \dots & & & \dots & & & \dots & & & & &
\end{array}$$

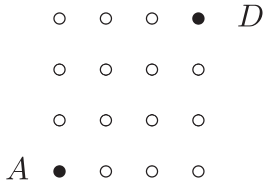
donde cada número es igual a la suma de los dos que tiene encima (como es evidente, cada fila consta de un número menos que la anterior, y por lo tanto la última fila estará formada por un único número), razonar que el último número es múltiplo de 1993.

**29/3.** Justificar razonadamente que en cualquier triángulo el diámetro de la circunferencia inscrita no es mayor que el radio de la circunferencia circunscrita.

*Segunda sesión. 27 de Febrero de 1993.*

**29/4.** Demostrar que todo número primo $p$ distinto de 2 y de 5 tiene infinitos múltiplos escritos sólo con unos (es decir, de la forma $111\ldots1$).

**29/5.** Se dan 16 puntos que forman una cuadrícula como en la figura:




De ellos, se han destacado dos: $A$ y $D$. Se pide fijar de todos los modos posibles otros dos puntos $B$ y $C$ con la condición de que las 6 distancias determinadas por los cuatro puntos sean distintas. En este conjunto de cuaternas, estudiar:

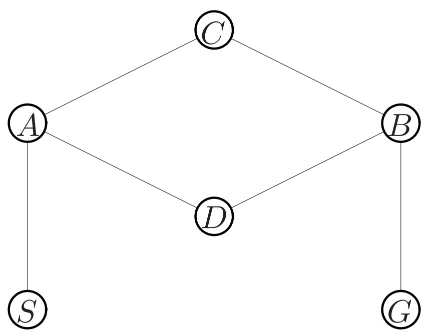
1) Cuántas figuras de 4 puntos existen con las condiciones del enunciado.

2) Cuántas de ellas son geométricamente diferentes, es decir, no deducibles una de otra por una transformación de igualdad.

3) Si cada punto se designa por un par de enteros $(X_i, Y_i)$, razonar que es constante la suma $|X_i - X_j| + |Y_i - Y_j|$, extendida a los seis pares $AB$, $AC$, $AD$, $BC$, $BD$, $CD$.

**29/6.** Una máquina de juego de un casino tiene una pantalla en la que se ofrece un esquema como el de la figura. Al comenzar el juego aparece una bola en el punto $S$.

A cada impulso del jugador, la bola se mueve hasta uno de los círculos inmediatos, con la misma probabilidad para cada uno de ellos. La partida acaba al ocurrir el primero de los dos sucesos siguientes: (1) La bola vuelve a $S$, y el jugador pierde. (2) La bola llega a $G$, y entonces el jugador gana. Se pide la probabilidad de que el jugador gane, y la duración media de las partidas.




---

**Premiados:** Álvaro Begué Aguado, Miguel Carrión Álvarez, Antonio Rojas León, David Sevilla González, Antonio Sánchez Esguevillas, David Castell Burgaleta.

*Primera sesión. 25 de Febrero de 1994.*

A

**30/1.** Demostrar que si entre los infinitos términos de una progesión aritmética de números enteros hay un cuadrado perfecto, entonces infinitos términos de la progresión son cuadrados perfectos.

A

**30/2.** Sea $O.XYZ$ un triedro trirrectángulo de vértice $O$ y aristas $X$, $Y$ y $Z$. Sobre la arista $Z$ se fija un punto $C$ tal que $OC = c$. Sobre $X$ e $Y$ ss consideran, respectivamente, puntos variables $P$ y $Q$ de manera que $OP + OQ$ sea una constante dada $k$. Para cada par de puntos $P$ y $Q$, los cuatro puntos $O$, $C$, $P$ y $Q$ determinan una esfera, cuyo centro $W$ se proyecta sobre el plano $OXY$. Razonar cuál es el lugar geométrico de esa proyección. Razonar también cuál es el lugar geométrico de $W$.

A

**30/3.** Una Oficina de Turismo va a realizar una encuesta sobre el número de dias soleados y de dias lluviosos al lo largo de un año. Para ello recurre a seis regiones, que le transmiten los datos de la tabla siguiente:

| *Región* | *Sol o lluvia* | *Inclasificable* |
|---|---|---|
| A | 336 | 29 |
| B | 321 | 44 |
| C | 335 | 30 |
| D | 343 | 22 |
| E | 329 | 36 |
| F | 330 | 35 |

La persona encargada de la encuesta, que tiene datos más detallados, no es imparcial. Se da cuenta de que, prescindiendo de una de las regiones, la observación da un número de dias lluviosos que es la tercera parte del número de dias de sol. Razonar cuál es la región de la que prescindirá.

*Segunda sesión. 26 de Febrero de 1994.*

**30/4.** El ángulo $A$ de un triángulo isósceles $ABC$ mide $2/5$ de recto, siendo los ángulos $B$ y $C$ iguales. La bisectriz del ángulo $C$ corta al lado opuesto en el punto $D$. Calcular las medidas de los ángulos del triángulo $BCD$. Expresar la medida $a$ del lado $BC$ en función de la medida $b$ del lado $AC$, sin que en la expresión aparezcan razones trigonométricas.

**30/5.** Con 21 fichas de damas, unas blancas y otras negras, se forma un rectángulo $3 \times 7$. Demostrar que siempre hay cuatro fichas del mismo color situadas en los vértices de un rectángulo.

**30/6.** Un polígono convexo de $n$ lados se descompone en $m$ triángulos con interiores disjuntos, de modo que cada lado de esos $m$ triángulos, lo es también de otro triángulo contiguo o del polígono dado. Demostrar que $m + n$ es par. Conocidos $m$ y $n$, hallar el número de lados distintos que quedan en el interior del polígono y el número de vértices distintos que quedan en ese interior.

---

**Premiados:** David Sevilla González, Tomás Baeza Oliva, Miguel Catalina Gallego, Alfonso Gracia Saz, Jerónimo Arenas García, Miguel A. Bermúdez Carro.

# 1994-95 XXXI Olimpíada Matemática Española — Castellón — 31

*Primera sesión. 24 de Febrero de 1995.*

A

**31/1.** Se consideran conjuntos $A$ de cien números naturales distintos, que tengan la propiedad de que si $a$, $b$, $c$ son elementos cualesquiera (iguales o distintos) de $A$, existe un triángulo no obtusángulo cuyos lados miden $a$, $b$ y $c$ unidades.
Se denomina $S(A)$ a la suma de los perímetros considerados en la definición de $A$. Calcular el valor mínimo de $S(A)$.

A

**31/2.** Recortamos varios círculos de papel (no necesariamente iguales) y los extendemos sobre una mesa de modo que haya algunos solapados (con parte interior común), pero de tal forma que no haya ningún círculo dentro de otro.
Probar que es imposible ensamblar las piezas que resultan de recortar las partes no solapadas y componer con ellas círculos disjuntos.

A

**31/3.** Por el baricentro $G$ de un triángulo $ABC$ se traza una recta que corta el lado $AB$ en $P$ y el lado $AC$ en $Q$. Demostrar que

$$\frac{PB}{PA}\cdot\frac{QC}{QA}\leq\frac{1}{4}.$$

*Segunda sesión. 25 de Febrero de 1995.*

**31/4.** Hallar las soluciones enteras de la ecuación $p(x+y)=xy$ donde $p$ es un número primo.

**31/5.** Demostrar que en el caso de que las ecuaciones

$$x^3+mx-n=0$$
$$nx^3-2m^2x^2-5mnx-2m^3-n^2=0$$

$(n\neq 0)$, tengan una raíz común, la primera tendrá dos raíces iguales, y determinar entonces las raíces de las dos ecuaciones en función de $n$.

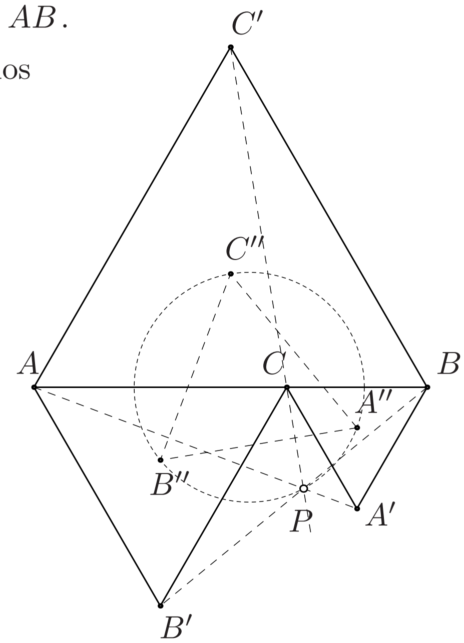
**31/6.** En la figura, $AB$ es un segmento fijo y $C$ un punto variable dentro de él. Se construyen triángulos equiláteros $ACB'$ y $CBA'$ de lados $AC$ y $CB$ en el mismo semiplano definido por $AB$, y otro triángulo equilátero $ABC'$ de lado $AB$ en el semiplano opuesto. Demostrar:

a) Las rectas $AA'$, $BB'$ y $CC'$ son concurrentes.

b) Si llamamos $P$ al punto común a las tres rectas del apartado a), hallar el lugar geométrico de $P$ cuando $C$ varía en el segmento $AB$.

c) Los centros $A''$, $B''$ y $C''$ de los tres triángulos forman un triángulo equilátero.

d) Los punts $A''$, $B''$, $C''$ y $P$ son concíclicos.




**Premiados:** Ángel Paredes Galán, Jerónimo Arenas García, Luis Fabiani Bendicho, Jaume Andreu Pascual, Alejandro García Gil, Ignacio Fernández Galván.

# 1995-96 — XXXII Olimpíada Matemática Española — 32

Tarragona

*Primera sesión. 22 de Febrero de 1996.*

**32/1.** Los números naturales $a$ y $b$ son tales que

$$\frac{a+1}{b} + \frac{b+1}{a}$$

es un entero. Demostrar que el máximo común divisor de $a$ y $b$ no es mayor que $\sqrt{a+b}$.

**32/2.** Sea $G$ el baricentro del triángulo $ABC$. Demostrar que si

$$AB + GC = AC + GB,$$

entonces el triángulo es isósceles.

**32/3.** Sean $a$, $b$ y $c$ tres números reales. Se consideran las funciones

$$f(x) = ax^2 + bx + c \qquad \text{y} \qquad g(x) = cx^2 + bx + a.$$

Sabiendo que

$$|f(-1)| \leq 1, \quad |f(0)| \leq 1, \quad \text{y} \quad |f(1)| \leq 1,$$

probar que si $-1 \leq x \leq 1$, entonces $|f(x)| \leq 5/4$ y $|g(x)| \leq 2$.

*Segunda sesión. 23 de Febrero de 1996.*

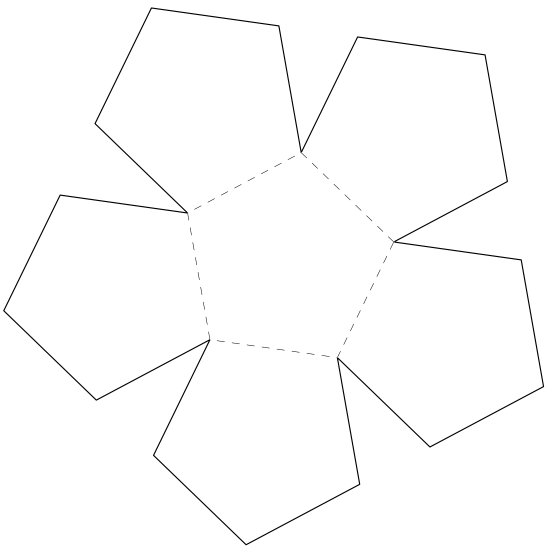
**32/4.** Discutir la existencia de soluciones reales $x$ de la ecuación

$$\sqrt{x^2 - p} + 2\sqrt{x^2 - 1} = x$$

según los valores reales del parámetro $p$, y resolverla en aquellos casos en que tenga solución.

**32/5.** En *Port Aventura* hay 16 agentes secretos. Cada uno de ellos vigila a alguno de sus colegas. Se sabe que si el agente $A$ vigila al agente $B$, entonces $B$ no vigila a $A$. Además, 10 agentes cualesquiera pueden ser numerados de forma que el primero vigila al segundo, éste vigila al tercero, ... , el décimo vigila al primero. Demostrar que también se pueden numerar de esa manera 11 agentes cualesquiera.

**32/6.** La figura adjunta se compone de seis pentágonos regulares de lado un metro. Se dobla por las líneas de puntos hasta que coincidan las aristas no punteadas que confluyen en cada vértice. ¿Qué volumen de agua cabe en el recipiente así formado?



---

**Premiados:** Sergi Elizalde Torrent, Tomás Palacios Gutiérrez, Fernando Rambla Blanco, Antonio Jara de las Heras, Patricia Sebastián Celorrio, Víctor Martínez de Albéniz Margalef.

*Primera sesión. 7 de Marzo de 1997.*

A

**33/1.** Calcular la suma de los cuadrados de los cien primeros términos de una progresión aritmética, sabiendo que la suma de ellos vale $-1$, y la suma de los términos de lugar par vale $+1$.

A

**33/2.** Un cuadrado de lado 5 se divide en 25 cuadrados unidad por medio de rectas paralelas a los lados. Sea $A$ el conjunto de los 16 puntos interiores, que son vértices de los cuadrados unidad, pero que no están en los lados del cuadrado inicial.
¿Cuál es el mayor número de puntos de $A$ que se pueden elegir de manera que *tres* cualesquiera de ellos *no* sean vértices de un triángulo rectángulo isósceles?

A

**33/3.** Se consideran las parábolas $y = x^2 + px + q$ que cortan a los ejes de coordenadas en tres puntos diferentes, por los que se traza una circunferencia. Demostrar que todas las circunferencias trazadas al variar $p$ y $q$ en $\mathbb{R}$ pasan por un punto fijo, que se determinará.

*Segunda sesión. 8 de Marzo de 1997.*

A **33/4.** Sea $p$ un número primo. Determinar todos los enteros $k \in \mathbb{Z}$ tales que $\sqrt{k^2 - pk}$ es un entero positivo.

A **33/5.** Demostrar que en un cuadrilátero convexo de área unidad, la suma de las longitudes de todos los lados y diagonales no es menor que $2(2+\sqrt{2})$.

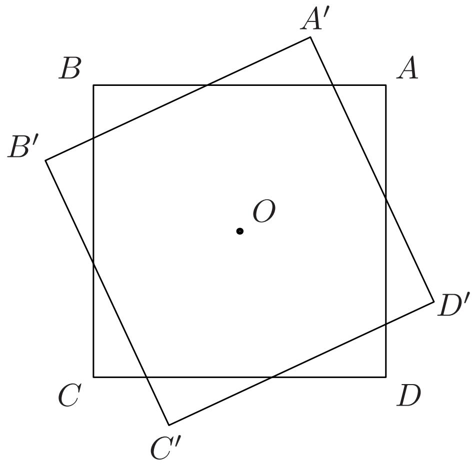
A **33/6.** Para dar una vuelta completa en un coche a un circuito circular, la cantidad exacta de gasolina está distribuida en depósitos fijos situados en $n$ puntos distintos cualesquiera del circuito. Inicialmente el depósito del coche está vacío. Demostrar que cualquiera que sea la distribución del combustible en los depósitos, siempre existe un punto de partida de forma que se puede dar la vuelta completa.
Aclaraciones:
Se supone que el consumo es uniforme y proporcional a la distancia.
El depósito del coche tiene capacidad suficiente para contener toda la gasolina.

---

**Premiados:** Anatoli Segura Vélez, Miguel Lobo López, Mario Andrés Montes García, Max Bernstein Obiols, Joseba Villate Bejarano, Xavier Pérez Giménez.

*Primera sesión. 13 de Marzo de 1998.*

A **34/1.** Un cuadrado $ABCD$ de centro $O$ y lado $\ell$ gira un ángulo $\alpha$ en torno a $O$. Hallar el área común a los dos cuadrados.




A **34/2.** Hallar todos los números naturales de cuatro cifras, escritos en base 10, que sean iguales al cubo de la suma de sus cifras.

A **34/3.** Se considera un triángulo $ABC$ y su circunferencia circunscrita. Si $D$ y $E$ son puntos sobre el lado $BC$ tales que $AD$ y $AE$ son, respectivamente, paralelas a las tangentes en $C$ y $B$ a la circunferencia circunscrita, demostrar que

$$\frac{BE}{CD} = \frac{AB^2}{AC^2}.$$

*Segunda sesión. 14 de Marzo de 1998.*

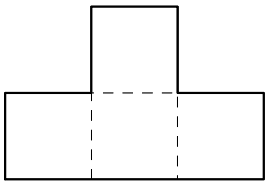
**34/4.** Hallar las tangentes de los ángulos de un triángulo sabiendo que son números enteros positivos.

**34/5.** Hallar todas las funciones $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ estrictamente crecientes y tales que

$$f\big(n + f(n)\big) = 2f(n)$$

para $n = 1, 2, 3, \ldots$

**34/6.** Determinar los valores de $n$ para los que es posible construir un cuadrado $n \times n$ ensamblando piezas del tipo



---

**Premiados:** Mario Andrés Montes García, Ramón José Aliaga Varea, David Martín Clavo, María Pe Pereira, Beatriz Sanz Merino, Jaime Vinuesa del Rio.

*Primera sesión. 12 de Marzo de 1999.*

A

**35/1.** Las recta $t$ y $t'$ tangentes a la parábola de ecuación $y = x^2$ en los puntos $A$ y $B$ se cortan en el punto $C$. La mediana del triángulo $ABC$ correspondiente al vértice $C$ tiene longitud $m$. Determinar el área del triángulo $ABC$ en función de $m$.

A

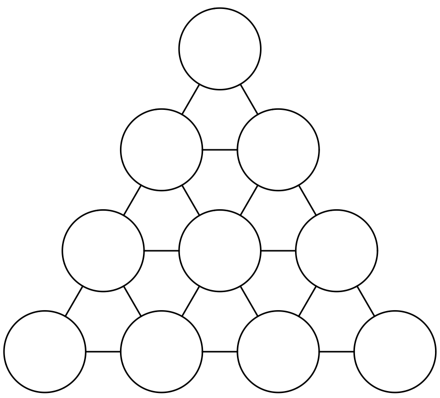
**35/2.** Probar que existe una sucesión de enteros positivos $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ tal que

$$a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2$$

es un cuadrado perfecto para todo entero positivo $n$.

A

**35/3.** Sobre un tablero en forma de triángulo equilátero con un número par de filas $n$ (tal como se indica en la figura), se juega un solitario.
Sobre cada casilla se coloca una ficha. Cada ficha es blanca por un lado y negra por el otro. Inicialmente, sólo una ficha, que está situada en un vértice, tiene la cara negra hacia arriba; las demás fichas tienen la cara blanca hacia arriba. En cada movimiento del juego se retira solamente una ficha negra del tablero y se da la vuelta a cada una de las fichas que ocupa una casilla vecina. (*Casillas vecinas* son las que están unidas por un segmento.)
Después de varios movimientos ¿será posible quitar todas las fichas del tablero?



*Segunda sesión. 13 de Marzo de 1999.*

A

**35/4.** Una caja contiene 900 tarjetas numeradas del 100 al 999. Se sacan al azar (sin reposición) tarjetas de la caja y se anota la suma de los dígitos de cada tarjeta extraída. ¿Cuál es la menor cantidad de tarjetas que se deben sacar, para garantizar que al menos tres de esas sumas sean iguales?

A

**35/5.** El baricentro del triángulo $ABC$ es $G$. Denotemos por $g_a$, $g_b$, $g_c$ las distancias desde $G$ a los lados $a$, $b$, $c$, respectivamente. Sea $r$ el radio de la circunferencia inscrita.

a) Probar que
$$g_a \geq \frac{2r}{3}, \quad g_b \geq \frac{2r}{3}, \quad g_c \geq \frac{2r}{3}.$$

b) Probar que
$$\frac{g_a + g_b + g_c}{r} \geq 3.$$

A

**35/6.** Se divide el plano en un número finito de regiones $n$ mediante tres familias de rectas paralelas. No hay tres rectas que pasen por el mismo punto. ¿Cuál es el mínimo número de rectas necesarias para que $n > 1999$?

---

**Premiados:** Ramón Aliaga Varea, Andrés Tallos Tanarro, Enrique Vallejo Gutiérrez, Álvaro Navarro Tobar, Javier Múgica de Ribera, Néstor Sancho Bejarano.

# 1999-2000 XXXVI Olimpíada Matemática Española 36

Palma de Mallorca

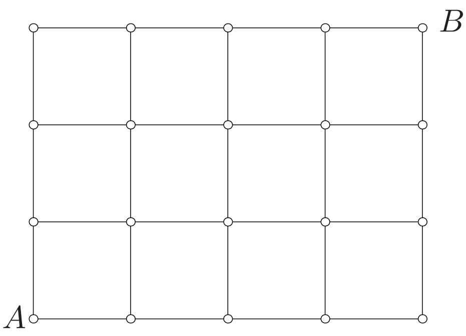
*Primera sesión. 30 de Marzo de 2000.*

**36/1.** Sean los polinomios:

$$P(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + 1;$$
$$Q(x) = x^4 + cx^3 + bx^2 + ax + 1.$$

Halla las condiciones que deben cumplir los parámetros reales $a$, $b$ y $c$, $(a \neq c)$, para que $P(x)$ y $Q(x)$ tangan dos raíces comunes, y resuelve en ese caso las ecuaciones $P(x) = 0$; $Q(x) = 0$.

**36/2.** La figura muestra un plano con calles que delimitan 12 manzanas cuadradas. Una persona $P$ va desde $A$ hasta $B$ y otra $Q$ desde $B$ hasta $A$. Ambas parten a la vez siguiendo caminos de longitud mínima con la misma velocidad constante. En cada punto con dos posibles direcciones a tomar, ambas tienen la misma probabilidad.
Halla la probabilidad de que $P$ y $Q$ se crucen.




**36/3.** Dos circunferencias $C_1$ y $C_2$ de radios $r_1$ y $r_2$ se cortan en los puntos $A$ y $B$. Por $B$ se traza una recta variable que corta de nuevo a $C_1$ y $C_2$ en dos puntos que llamaremos $P_r$ y $Q_r$, respectivamente.
Demuestra la siguiente propiedad: Existe un punto $M$, que depende sólo de $C_1$ y $C_2$, tal que la mediatriz del segmento $P_rQ_r$ pasa por $M$.

*Segunda sesión. 31 de Marzo de 2000.*

**36/4.** Encuentra el mayor número entero $N$ que cumpla las siguientes condiciones:
a) $E(N/3)$ tiene sus tres cifras iguales.
b) $E(N/3)$ es suma de números naturales consecutivos comenzando en 1, es decir, existe un natural $n$ tal que

$$E(N/3) = 1 + 2 + 3 + \cdots + n.$$

*Nota:* $E(x)$ es la parte entera de $x$.

**36/5.** Tomemos cuatro puntos situados en el interior o el borde de un cuadrado de lado 1. Demuestra que al menos dos de ellos están a una distancia menor o igual que 1.

**36/6.** Demuestra que no existe ninguna función $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ que cumpla

$$f\big(f(n)\big) = n + 1.$$

---

**Premiados:** Carlos Gómez Rodríguez, Luis Emilio García Martínez, Alberto Suárez Real, José María Cantarero López, Manuel Pérez Molina, Roberto Rubio Núñez.

*Primera sesión. 23 de Marzo de 2001, de 16.00 a 19.30.*

A

**37/1.** Probar que la gráfica del polinomio $P(x)$ es simétrica respecto del punto $A(a,b)$ si y sólo si existe un polinomio $Q(x)$ tal que

$$P(x) = b + (x-a)\,Q\Big((x-a)^2)\Big).$$

A

**37/2.** Sea $P$ un punto en el interior del triángulo $ABC$, de modo que el triángulo $ABP$ cumple

$$AP = BP.$$

Sobre cada uno de los otros lados de $ABC$ se construyen exteriormente triángulos $BQC$ y $CRA$, ambos semejantes al triángulo $ABP$ cumpliendo:

$$BQ = QC \quad \text{y} \quad CR = RA.$$

Probar que los puntos $P$, $Q$, $C$ y $R$ o están alineados o son los vértices de un paralelogramo.

A

**37/3.** Se tienen cinco segmentos de longitudes $a_1$, $a_2$, $a_3$, $a_4$ y $a_5$ tales que con tres cualesquiera de ellos es posible construir un triángulo.
Demostrar que al menos uno de esos triángulos tiene todos los ángulos agudos.

*Segunda sesión. 24 de Marzo de 2001, de 9.30 a 13.00*

**37/4.** Los números enteros desde 1 hasta 9 se distribuyen en las casillas de una tabla $3 \times 3$. Después se suman seis números de tres cifras: los tres que se leen en filas de izquierda a derecha y los tres que se leen en columnas de arriba abajo.
¿Hay alguna disposición para la cual el valor de esa suma sea 2001?

**37/5.** Sea $ABCD$ un cuadrilátero inscrito en una circunferencia de radio 1 de modo que $AB$ es un diámetro y el cuadrilatero admite circunferencia inscrita.
Probar que $CD \leq 2\sqrt{5} - 4$.

**37/6.** Determinar la función $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ (siendo $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ el conjunto de los números naturales) que cumple, para cualesquiera $s, n \in \mathbb{N}$, las siguientes condiciones:
$f(1) = f(2^s) = 1$ y si $n < 2^s$, entonces $f(2^s + n) = f(n) + 1$.
Calcular el valor máximo de de $f(n)$ cuando $n \leq 2001$.
Hallar el menor número natural $n$ tal que $f(n) = 2001$.

---

**Premiados:** Javier Cóppola Rodríguez, Martí Prats Soler, Luis Hernández Corbato, Sergio Millán López, Ignacio Cascudo Pueyo, Miquel Oliu Barton.

# 2001-02 XXXVIII Olimpíada Matemática Española 38

Logroño

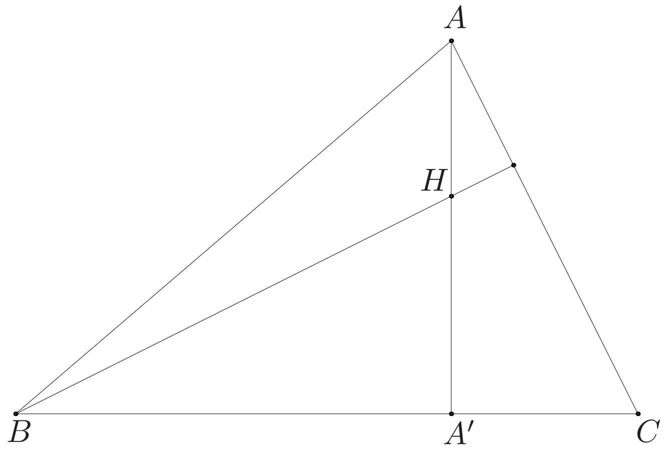
*Primera sesión. 5 de Abril de 2002, de 16.00 a 19.30.*

**38/1.** Hallar todos los polinomios $P(t)$ de una variable, que cumplen

$$P(x^2 - y^2) = P(x+y)P(x-y)$$

para todos los números reales $x$ e $y$.

**38/2.**
En un triángulo $ABC$, $A'$ es el pie de la altura relativa al vértice $A$, y $H$ el ortocentro.
a) Dado un número real positivo $k = \dfrac{AA'}{HA'}$, hallar la relación entre los ángulos $B$ y $C$ en función de $k$.
b) Si $B$ y $C$ son fijos, hallar el lugar geométrico del vértice $A$ para cada valor de $k$.




**38/3.** La función $g$ se define sobre los números naturales y satisface las condiciones

$$g(2) = 1$$
$$g(2n) = g(n)$$
$$g(2n+1) = g(2n) + 1.$$

Sea $n$ un número natural tal que $1 \leq n \leq 2002$. Calcula el valor máximo $M$ de $g(n)$. Calcula también cuántos valores de $n$ satisfacen la condición $g(n) = M$.

*Segunda sesión. 6 de Abril de 2002, de 9.30 a 13.00*

A **38/4.** Sea $n$ un número natural, y $m$ el que resulta al escribir en orden inverso las cifras de $n$. Determinar, si existen, los números de tres cifras que cumplen $2m+S=n$, siendo $S$ la suma de las cifras de $n$.

A **38/5.** Se consideran 2002 segmentos en el plano, tales que la suma de sus longituds es la unidad. Probar que existe una recta $r$ tal que la suma de las longitudes de las proyecciones de los 2002 segmentos dados sobre $r$ és menor que $2/3$.

A **38/6.** En un polígono regular $H$ de $6n+1$ lados ($n$ es un entero positivo), pintamos $r$ vértices de color rojo, y el resto de azul. Demostrar que el número de triángulos isósceles que tienen sus tres vértices del mismo color no depende del modo de distribuir los colores en los vértices de $H$.

---

**Premiados:** Daniel Rodrigo López, Luis Hernández Corbato, Sergio Millán López, David García Soriano, Susana Ladra González, José Miguel Manzano Prego.

*Primera sesión. 3 de Marzo de 2003, de 9.00 a 13.00.*

A **39/1.** Probar que para cualquier primo $p$ distinto de 2 y 5 existe un múltiplo de $p$ cuyas cifras son todas nueves. Por ejemplo, si $p = 13$, es $999999 = 13 \cdot 76923$.

A **39/2.** ¿Existe algún conjunto finito de números reales $M$ que contenga al menos dos elementos distintos y que cumpla la propiedad de que para dos números $a$, $b$ cualesquiera de $M$, el número $2a - b^2$ sea también un elemento de $M$?

A **39/3.** Las alturas del triángulo $ABC$ se cortan en el punto $H$. Se sabe que $AB = CH$. Determinar el valor del ángulo $\widehat{BCA}$.

*Segunda sesión. 4 de Marzo de 2003, de 9.00 a 13.00*

A **39/4.** Sea $x$ un número real tal que $x^3 + 2x^2 + 10x = 20$. Demostrar que tanto $x$ como $x^2$ son irracionales.

A **39/5.** ¿Cuáles son las posibles áreas de un hexágono convexo con todos los ángulos iguales y cuyos lados miden 1, 2, 3, 4, 5 y 6, en algún orden?

A **39/6.** Ensartamos $2n$ bolas blancas y $2n$ bolas negras formando una cadena abierta. Demuestra que, se haga en el orden en que se haga, siempre es posible cortar un segmento de cadena que contenga exactamente $n$ bolas blancas y $n$ bolas negras.

---

**Premiados:** Daniel Rodrigo López, Luis Hernández Corbato, Mohamed Blanca Ruiz, Víctor González Alonso, Javier Gómez Serrano, Maite Peña Alcaraz.

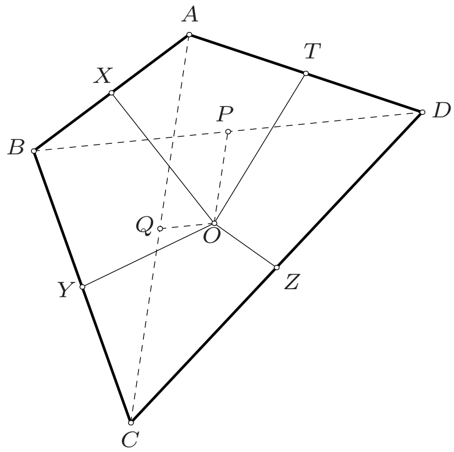
*Primera sesión. 26 de Marzo de 2004, de 9.00 a 13.00.*

A

**40/1.** Tenemos un conjunto de 221 números reales cuya suma es 110721. Los disponemos formando una tabla rectangular de modo que todas las filas y la primera y última columnas son progresiones aritméticas de más de un elemento. Probar que la suma de los elementos de las cuatro esquinas vale 2004.

A

**40/2.** $ABCD$ es un cuadrilátero cualquiera, $P$ y $Q$ los puntos medios de las diagonales $BD$ y $AC$, respectivamente. Las paralelas por $P$ y $Q$ a la otra diagonal se cortan en $O$. Si unimos $O$ con los cuatro puntos medios de los lados $X$, $Y$, $Z$ y $T$, se forman cuatro cuadriláteros $OXBY$, $OYCZ$, $OZDT$ y $OTAX$.
Probar que los cuatro cuadriláteros tienen la misma área.




A

**40/3.** Se representa por $\mathbb{Z}$ el conjunto de todos los enteros. Hallar todas las funciones $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ tales que, para cualesquiera $x, y$ enteros se cumple

$$f\big(x + f(y)\big) = f(x) - y.$$

*Segunda sesión. 27 de Marzo de 2004, de 9.00 a 13.00*

A **40/4.** ¿Existe alguna potencia de 2, que al escribirla en el sistema decimal tenga todos sus dígitos distintos de cero y sea posible reordenar los mismos para formar con ellos otra potencia de 2 distinta? Justificar la respuesta.

A **40/5.** Demostrar que la condición necesaria y suficiente para que, en el triángulo $ABC$, la mediana desde $B$ sea dividida en tres partes iguales por la circunferencia inscrita en el triángulo, es

$$\frac{a}{5} = \frac{b}{10} = \frac{c}{13}.$$

A **40/6.** Colocamos, formando una circunferencia, 2004 fichas bicolores: blancas por una cara y negras por la otra. Un movimiento consiste en elegir una ficha con la cara negra hacia arriba y dar la vuelta a tres fichas: la elegida, la de su derecha, y la de su izquierda. Supongamos que inicialmente hay una sola ficha con la cara negra hacia arriba. ¿Será posible, repitiendo el movimiento descrito, conseguir que todas las fichas tengan la cara blanca hacia arriba? ¿Y si tuviéramos 2003 fichas, entre las cuales exactamente una tiene al comienzo la cara negra hacia arriba?

---

**Premiados:** Joaquim Serra Montolí, Maite Peña Alcaraz, Elisa Lorenzo García, Miguel Teixidó Román, Francisco J. Hernández Heras, M. Isabel Cordero Marcos.

**OME 1. Problema 1. Sugerencia**

a) Expresar la parte imaginaria de las raíces de la ecuación en función de $a$.

b) Buscar alguna relación entre la parte real e imaginaria de las raíces, que no dependa de $a$.

**OME 1. Problema 2. Sugerencia**

Expresar la recta de pendiente 0.14 en función de $x$ y $P$.

## OME 1. Problema 3. Sugerencia

a) Hay

$$\binom{n}{2} - n$$

diagonales y en cada vértice concurren $n-3$.

b) Cuatro vértices determinan siempre un punto interior.

**OME 1. Problema 4. Sugerencia**

Construir un triángulo equilátero a partir de dicho segmento.

## OME 1. Problema 5. Sugerencia

Hay cinco conjuntos de triángulos.

SE

**OME 1. Problema 6. Sugerencia**

La función $g(x) = |f(x) - k|$ consiste en desplazar la gráfica de $f(x)$ según el vector $(0, -k)$ y además simetrizar respecto del eje $OX$ la parte de la gráfica que se encuentra bajo este eje.

## OME 1. Problema 7. Sugerencia

Considerar el movimiento como una permutación de los $n$ elementos y escribirla con la notación habitual de ciclos.

**OME 1. Problema 8. Sugerencia**

Expresar la distancia del punto medio del segmento a la recta horizontal en función de $a$ y $\alpha$ (ángulo formado por dicho segmento y la horizontal) y encontrar el máximo de esta función.

S E

## OME 2. Problema 1. Sugerencia

Sea $A'B'C'$ el triángulo transformado y $P$, $Q$ los puntos de corte de $A'B'$ con $BC$ y $BA$, respectivamente. Demostrar que que el triángulo $BPQ$ tiene ángulos de $90°$, $60°$ y $30°$ y perímetro $4\sqrt{3}$.

SE

**OME 2. Problema 2. Sugerencia**

Probar que si la cifra central es $n > 2$, existen $n(n-1)$ números que cumplen las condiciones iniciales y $(n-1)^2$ números que cumplen las condiciones con cifras no repetidas.

## OME 2. Problema 3. Sugerencia

Considerar la longitud de la pista como suma de circunferencias concéntricas cuyos radios están en progresión aritmética.

## OME 2. Problema 4. Sugerencia

Interpretar geométricamente el problema. Tomando un punto $P$ de la circunferencia de radio 1, centrada en el origen y siendo $x$ el ángulo que forma el semieje positivo $OY$ con $OP$ (medido en sentido antihorario).

## OME 2. Problema 5. Sugerencia

Probar que con $b = 0$ no hay discrepancia y que en caso contrario la propiedad no puede aplicarse porque quedaría el denominador igual a cero.

**OME 2. Problema 6. Sugerencia**

Buscar los triángulos rectángulos adecuados y aplicar el teorema de Pitágoras.

SE

## OME 2. Problema 7. Sugerencia

Si $x$ es el radio de la base pequeña del tronco de cono, probar que la masa en función de $x$ es

$$M(x) = \left(\frac{1}{3}\pi r^3 m - \frac{1}{3}\pi x^3 m\right) d + \pi x^2 p$$

S E

**OME 2. Problema 8. Sugerencia**

a) Buscar triángulos semejantes para demostrar que $r_2 = r_1 \, \dfrac{d - r_1}{d + r_1}$.

b) Demostrar mediante inducción $r_n = r_1 \left( \dfrac{d - r_1}{d + r_2} \right)^{n-1}$.

c) Ésta es la suma de los términos de una progresión geométrica.

## OME 3. Problema 1. Sugerencia

Se debe resolver un sistema de tres variables y dos incógnitas, teniendo en cuenta que las variables sólo pueden tomar valores naturales y que la variable correspondiente al número de productos de mayor precio debe ser la máxima posible.

**OME 3. Problema 2. Sugerencia**

El número $xyz$ en la base $n$, representa el número $x\,n^2 + y\,n + z$ en base 10 y si $n \leq 10$, cada una de sus cifras puede tomar valores entre 0 y $n-1$.

## OME 3. Problema 3. Sugerencia

Sea $ABCDE$ el pentágono exterior y $A'B'C'D'E'$ el pentágono interior, nombrando los vértices en sentido horario y siendo $A'$ la intersección de $AC$ y $BE$. Probar que los triángulos $A'BA$ y $CDE$ son semejantes y obtener alguna identidad que permita deducir el valor de la diagonal del pentágono en función del lado.

## OME 3. Problema 4. Sugerencia

Expresar la función del coste de instalación en función de $x$, siendo $x$ la distancia entre el punto $M$ y el techo. Encontrar el mínimo (o los mínimos), distinguiendo los casos $p < 2q$ y $p \geq 2q$.

## OME 3. Problema 5. Sugerencia

a) Aplicar el teorema del coseno a los triángulos $AMB$, $AMC$ y de igual forma a los triángulos $ANC$, $ANB$.

b) Los dos triángulos comparten una de sus alturas. $M'N'$ es un diámetro de dicha circunferencia.

## OME 3. Problema 6. Sugerencia

Si $P(k)$ denota la probabilidad de que nazcan $k$ chicos y $5-k$ chicas, la probabilidad que nos piden es $P(2)+P(3)+P(4)$.

SE

**OME 3. Problema 7. Sugerencia**

Resolver un sistema de ecuaciones cuyas variable sean la razón de la progresión y el término central.

**OME 3. Problema 8. Sugerencia**

Demostrar que $y(3) = 1$, $y'(3) = 1/4$, $y''(3) = 0$. A partir de esto plantear y resolver un sistema.

**OME 4. Problema 1. Sugerencia**

Podremos asegurar que $y$ será estrictamente creciente en un intervalo de valores de $x$ si

i) $2x - x^2$ es estrictamente creciente en dicho intervalo.

ii) $-8 \leq 2x - x^2 \leq 8$ para todo $x$ de dicho intervalo.

## OME 4. Problema 2. Sugerencia

Probar que el centro de inversión debe pertenecer a las circunferencias que tienen por diámetro $AC$ y $BD$, respectivamente.

## OME 4. Problema 3. Sugerencia

Representar mediante franjas las trayectorias de los coches que circulan en ambos sentidos y determinar durante qué intervalo de tiempo no circulan coches a 400 m del primer semáforo.

**OME 4. Problema 4. Sugerencia**

El procedimiento será medir la distancia entre el fondo de la botella y el nivel del vino; primero con la botella apoyada sobre su base y después con la botella también vertical, pero invertida.

## OME 4. Problema 5. Sugerencia

a) Demostrad que todos los arcos $A_kA_{k+1}$ son iguales.

b) Demostrad que si $L$ es la longitud de la quebrada, $AB = L\,\cos\alpha$.

**OME 4. Problema 6. Sugerencia**

Encontrar el inverso de cada uno de los segmentos o semirrectas y determinar la región transformada correspondiente a cada una de las regiones iniciales.

## OME 4. Problema 7. Sugerencia

Determinar la función correspondiente a la cantidad de coches que atraviesan un punto de control, en función de la velocidad de dichos coches y suponiendo un tiempo $t$ fijado. Hallar el máximo de dicha función.

S E

## OME 4. Problema 8. Sugerencia

El nuevo algoritmo es prácticamente idéntico al anterior, sólo debe calcular el valor del polinomio de coeficientes $(n-i)\,a_i$ para $x=b$.

## OME 5. Problema 1. Sugerencia

Expresar la altura del hielo a las 0 h y a las 4 h en función de $k$ y $t$, que serán respectivamente, la constante de crecimiento del hielo y el tiempo transcurrido desde que el agua empezó a helarse y las 0 h.

**OME 5. Problema 2. Sugerencia**

Si dos sucesiones $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ tienden a un mismo valor $k$ y las sucesiones $\{f(x_n)\}$, $\{f(y_n)\}$ no, entonces $f$ no es continua en $k$. Para declarar que no puede decidirse si una función con unas determinadas propiedades es continua en un punto o no, hay que encontrar dos funciones que cumplan las condiciones, una de ellas continua en ese punto y otra no.

S E

**OME 5. Problema 3. Sugerencia**

Recordar que dicha figura debe dibujarse a trozos. Son puntos importantes en la construcción, aquellos puntos interiores al cuadrado que uniéndolos con alguna pareja de vértices del mismo, forman un triángulo equilátero.

SE

**OME 5. Problema 4. Sugerencia**

Si $S(x,h)$ es la superficie del triángulo isósceles que resulta de cortar la figura por el punto $x$ del segmento $AB$ mediante un plano perpendicular a este mismo segmento; entonces

$$V = 2\int_0^r S(x,h)\,dx.$$

SE

**OME 5. Problema 5. Sugerencia**

Recordar que los puntos medios de los segmentos de paralelas a un lado del triángulo se encuentran sobre la mediana relativa a ese lado.

**OME 5. Problema 6. Sugerencia**

La perpendicular por el circuncentro de un triángulo coincide con el lugar geométrico de los puntos que equidistan de los vértices. Los tetraedros con aristas sobre los ejes cartesianos son muy útiles para facilitar cálculos.

SE

## OME 5. Problema 7. Sugerencia

El número de cifras de $2^n$ es $1+[n\log 2]$ , donde $[\cdot]$ denota la parte entera inferior (máximo entero inferior o igual a $n$).

## OME 5. Problema 8. Sugerencia

Suponer que el cuadrado es la celda de una cuadrícula que ocupa todo el plano. En vez de estudiar las reflexiones sobre los lados del cuadrado, es más fácil estudiar los cortes con los ejes de la semirrecta que tiene mismo origen y dirección que el rayo de luz.

S E

## OME 6. Problema 1. Sugerencia

Si $A'$ y $B'$ son los transformados de $A$ y $B$, observar que la recta $A'B'$, es ortogonal a la circunferencia inversa de $\gamma$.

SE

**OME 6. Problema 2. Sugerencia**

Observar que el triángulo de vértices en $O$ y en los afijos de $z$ e $iz$ es rectángulo en $O$ e isósceles.

## OME 6. Problema 3. Sugerencia

Tener en cuenta que, mediante rotaciones, dos coloraciones, en principio diferentes, en realidad pueden ser la misma.

**OME 6. Problema 4. Sugerencia**

Calcular primero el valor de la distancia del centro de la circunferencia al punto medio de uno de los lados.

**OME 6. Problema 5. Sugerencia**

Distinguir los casos en que el corte vaya de vértice a vértice, de vértice a lado, o de lado a lado. Después estudia más detenidamente los casos en que pueda ser posible.

## OME 6. Problema 6. Sugerencia

Habiendo analizado las desigualdades primeras, aplica la o las que se cumplan para hallar $M(x)$. Téngase en cuenta que el valor absoluto de un polinomio no es, en principio, un polinomio.

## OME 6. Problema 7. Sugerencia

Considerar los ángulos centrales de cada lado y usa las desigualdades que se puedan extraer de éstos para hallar las referidas a los ángulos interiores.

**OME 6. Problema 8. Sugerencia**

Aplicar la teoría de permutaciones. Comprobar si el producto de transformaciones "pinchazo" es una operación interna.

## OME 7. Problema 1. Sugerencia

El volumen desalojado al descender 1 cm el nivel coincide con el de un cilindro oblicuo de base elíptica ($V = \pi abh$, donde $a$ y $b$ son los semiejes de la elipse).

**OME 7. Problema 2. Sugerencia**

Siguiendo el método sugerido, comprueba que al sustituir una yema de alejamiento $k$, tanto el alejamiento total como la carga total aumentan en $k+2$.

## OME 7. Problema 3. Sugerencia

Suponiendo que $PA = PB$ demuestra que existe un punto $Q$ del lado $AC$ tal que el área del triángulo $APQ$ sea la mitad del área inicial.

## OME 7. Problema 4. Sugerencia

Descomponer los polinomios a partir de los datos del problema y trata de hallar las raíces a partir de su mcm y su mcd.

SE

**OME 7. Problema 5. Sugerencia**

Pensar en una clase con 100 alumnos y distribuir las notas de la manera menos favorable posible.

## OME 7. Problema 6. Sugerencia

Nótese que el lado $MN$ (y el punto $B$) está en el eje radical de las circunferencias $\gamma$ y la circunscrita al triángulo $AMN$.

**OME 7. Problema 7. Sugerencia**

Transformar la ecuación en una que solo tenga $\cos x$ como incógnita.

SE

## OME 7. Problema 8. Sugerencia

Aplicar el teorema del coseno en los triángulos $OMA$, $OMB$, $OMC$, $OMD$.

**OME 8. Problema 1. Sugerencia**

Recordar que $1331_{(k} = k^3 + 3k^2 + 3k + 1$.

SE

**OME 8. Problema 2. Sugerencia**

Para el Teorema 1, tomar un punto $E$ que no esté en la recta $AC$. Así puedo tomar un punto $F$ en la recta $AE$ tal que $E$ esté entre $A$ y $F$. Igualmente construid el punto $D$ en la recta $CF$ y estudiar la recta $DE$. Para el Teorema 2, usar el Teorema 1 y partir de un punto $D$ fuera de la recta que contiene a los tres puntos.

**OME 8. Problema 3. Sugerencia**

Dividir la inecuación por la expresión $px^2 + qy^2$ (que es positiva, salvo el caso extremo $x = y = 0$) y resolver la inecuación que resulta.

**OME 8. Problema 4. Sugerencia**

Se cumple que $(a-b)(A-B)=0$, y lo mismo con $b-c$ y $c-a$.

**OME 8. Problema 5. Sugerencia**

Calcular el límite que se pide demostrar mediante las igualdades anteriores, teniendo en cuenta también que $|z| < 1$.

## OME 8. Problema 6. Sugerencia

Estudiar las dos alternativas siguientes: ir directo de $P$ a $A$ ó ir de $P$ a $B$ (siendo $B$ algún punto de la circunferencia) y de $B$ a $A$ por la circunferencia. Parametrizar $B$ en función del ángulo y estudia la función $T(a)$ (que mide el tiempo tardado con la segunda opción en función del ángulo) para determinar la mejor alternativa en cada caso.

SE

**OME 8. Problema 7. Sugerencia**

Calcular primero el radio de la circunferencia transformada distinguiendo los casos $d > r$, $d < r$ y $d = r$ (siendo d la distancia del centro de las circunferencia al centro de inversión).

## OME 8. Problema 8. Sugerencia

Considera la descomposición $a_i = 2^{b_i}\, p_i$ , donde $p_i$ es impar.

## OME 9. Problema 1. Sugerencia

Comprobar que $(M,+)$ es un grupo y que cumple las propiedades necesarias para el producto. Utilizar la condición que implica que una matriz sea invertible.

SE

**OME 9. Problema 2. Sugerencia**

Calcular los máximos y mínimos en cada lado por separado.

## OME 9. Problema 3. Sugerencia

Desarrollar el prisma sobre un plano.

## OME 9. Problema 4. Sugerencia

El conjunto $A$ es una semirrecta y el conjunto $B$ una bola abierta.

## OME 9. Problema 5. Sugerencia

Si llamamos $PQR$ al triángulo buscado, existe un giro que transforma $Q$ en $R$.

**OME 9. Problema 6. Sugerencia**

Considerar dos maneras de calcular el área del triángulo, una a partir del radio inscrito y otra a partir de los lados.

**OME 9. Problema 7. Sugerencia**

Inténtese demostrarlo por inducción.

S E

**OME 9. Problema 8. Sugerencia**

Las clases de equivalencia cumplen que la suma de las componentes de cada vector es constante.

## OME 10. Problema 1. Sugerencia

Considerar la función $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - 10x^2(x-1)$ y buscar sus mínimos.

## OME 10. Problema 2. Sugerencia

Solucionar primero el sistema de 3 ecuaciones.

## OME 10. Problema 3. Sugerencia

Intentar hallar una expresión explícita de la sucesión. Después debes tener en cuenta que la serie de potencias de término general $\dfrac{x^k}{k}$ tiene por valor $-\log(1-x)$ para $|x|<1$, debido a las propiedades de la serie de Taylor.

**OME 10. Problema 4. Sugerencia**

Considerar el triángulo formado por el centro $O$ de $C$ y $C'$, el centro $P$ de una de las circunferencias $C_i$ y el punto $Q$ de tangencia entre $C_i$ y $C_{i+1}$.

SE

## OME 10. Problema 5. Sugerencia

Considerar la condición de independencia lineal y el polinomio de Taylor centrado en el punto 2.

SE

**OME 10. Problema 6. Sugerencia**

Considerar los triángulos $ABP$, $ACP$ y $BCP$. Luego aplicar la desigualdad triangular y el lugar geométrico hallado en (b).

## OME 10. Problema 7. Sugerencia

Tener en cuenta que los caminos sobre los ejes son de longitud constante. Por lo tanto, hay que minimizar el resto del camino.

S E

**OME 10. Problema 8. Sugerencia**

Usar la ecuación de una recta en el espacio.

## OME 11. Problema 1. Sugerencia

Pensar en la disposición espacial de los elementos de un dodecaedro.

**OME 11. Problema 2. Sugerencia**

Expresar el volumen del cono en función, únicamente, del ángulo $\alpha$ y del radio del disco metálico $r$, constante. Recuerda que el volumen del cono es

$$V = \frac{1}{3}\pi\rho^2 h$$

siendo $\rho$ el radio de la circunferencia de la base y $h$ la altura.

## OME 11. Problema 3. Sugerencia

Comprobar que para dos elementos cualquier de $\mathbb{Z}_{(5)}$ su resta y su producto también pertenecen al conjunto. Probar que $\mathbb{Z}_{(5)}$ no es un cuerpo para responder negativamente a la última cuestión.

**OME 11. Problema 4. Sugerencia**

Construir el simétrico del triángulo respecto a cada lado en que se produce la reflexión, y continuar la progresión del rayo en el triángulo creado (como si no hubiese reflexión), para que ésta sea una línea recta de la que puedes hallar su longitud.

## OME 11. Problema 5. Sugerencia

Sean $a, b \in G$. Inténtese demostrar que $ab = ba$, sabiendo que $a^2 = b^2 = e$.

SE

**OME 11. Problema 6. Sugerencia**

Sea $F$ el punto medio de $BC$. Prolonga la recta $BC$ y elige en ella un punto $G$ tal que $\mathrm{d}(F,G) = 3\,\mathrm{d}(F,B)$. Toma como $D$ el punto en que la circunferencia corta a $GA$.

# OME 11. Problema 7. Sugerencia

Calcular primero la altura del agua si el prisma está en posición vertical. Supóngase que una de las aristas consideradas está apoyada en tierra. Entonces la diferencia de la altura con el valor en posición vertical de una arista se tiene que compensar con la altura de su opuesta.

**OME 11. Problema 8. Sugerencia**

Observar que si más de la mitad de los lados son del mismo color, habrá dos de ellos que sean contiguos.

**OME 12. Problema 1. Sugerencia**

Pensar en la definición de integral Riemann de la función $x^k$.

S E

**OME 12. Problema 2. Sugerencia**

Calcular los límites de $f$ para $x \to 0,\ -1,\ \pm\infty$. Comprobar además que la derivada es positiva.

**OME 12. Problema 3. Sugerencia**

Aplicar las definiciones de cuerpo, anillo y espacio vectorial.

S E

**OME 12. Problema 4. Sugerencia**

Utilizar la desigualdad de medias aritmética y geométrica.

**OME 12. Problema 5. Sugerencia**

Construir un triángulo con base en $r$ y con $A$ como vértice tal que $B$ sea el incentro.

**OME 12. Problema 6. Sugerencia**

Comprobar cómo son las sucesiones módulo 8.

# OME 12. Problema 7. Sugerencia

Estudiar la función en los intervalos $(-8,-3]$, $[-3,-1]$ , $[-1,2]$, $[2,5]$ y $[5,8)$, separadamente.

**OME 12. Problema 8. Sugerencia**

En el cuadrado $[0,1] \times [0,1]$ del plano $XY$, determinar los puntos $(x, y)$ que satisfacen la condición del enunciado y aplicar la regla de Laplace.

SE

**OME 13. Problema 1. Sugerencia**

Suponiendo el cuadrado construido, ¿en qué punto corta la diagonal con el círculo de diámetro $AB$? (donde $A$ y $B$ pertenecen a lados adyacentes).

**OME 13. Problema 2. Sugerencia**

Agrupar las $r$-plas en pares de suma 0.

## OME 13. Problema 3. Sugerencia

El espejo realiza una simetría de eje vertical, y la lente una simetría de eje horizontal.

**OME 13. Problema 4. Sugerencia**

La expresión es igual a $(n-2)(n-1)n(n+1)$. Uno de estos términos es múltiplo de 4.

S E

**OME 13. Problema 5. Sugerencia**

Realizar el cambio $z = (1 - i)\,t$. Resulta una ecuación de cuarto grado con dos raíces complejas y dos reales; acotar sus argumentos.

**OME 13. Problema 6. Sugerencia**

Si $M = A + B$, con $A$ simétrica y $B$ antisimétrica, entonces $M + M^t = 2A$.

## OME 13. Problema 7. Sugerencia

El producto de dos números no negativos, con suma dada, es máximo cuando ambos son iguales.

S E

**OME 13. Problema 8. Sugerencia**

Estudiar los límites laterales en ese punto.

## OME 14. Problema 1. Sugerencia

Intentar conseguir una fila con todos los términos iguales para poder sacar el factor fuera del determinante. Luego, restando filas, transformarlo en un determinante cuyo valor sea el producto de los elementos de la diagonal.

**OME 14. Problema 2. Sugerencia**

Para la primera parte, simplemente recordar la definición de cuerpo conmutativo y aplicar las propiedades de suma y producto de números reales. Para la segunda parte, plantear la ecuación en las matrices y resolver el sistema que aparece.

## OME 14. Problema 3. Sugerencia

Suponer que todos dan un número impar de apretones y estudiar la paridad de la suma de todos los números de apretones.

## OME 14. Problema 4. Sugerencia

Expresar la suma como

$$(n-2)^2 + (n-1)^2 + n^2 + (n+1)^2 + (n+2)^2$$

y desarrollar.

**OME 14. Problema 5. Sugerencia**

Plantear un sistema cuyas incógnitas sean el número de peldaños visibles y el número de peldaños que se esconden en el tiempo que tardamos en bajar un escalón.

# OME 14. Problema 6. Sugerencia

Si se llama $O$ al centro de la circunferencia y $M$ a la segunda intersección de $AO$ con la circunferencia circunscrita, intentar demostrar que $AM$ es un diámetro de esta última circunferencia o, lo que es lo mismo, que el ángulo $\widehat{ABM}$ es recto. Puede ser útil considerar el punto $P$, intersección de $AD$ con la circunferencia circunscrita, que además, es el punto medio del arco $BC$.

## OME 14. Problema 7. Sugerencia

Desarrollar los cuadrados y estudiar la función resultante. Recordar que el extremo de una función parabólica se alcanza en el vértice.

**OME 14. Problema 8. Sugerencia**

Para encontrar la condición, considerar que si el triángulo es equilátero, entonces ha de ser $|z_1 - z_2| = |z_2 - z_3| = |z_3 - z_1|$. para comprobar que la condición es suficiente, considérese la condición como ecuación en $z_3$ y deducir que

$$z_3 - z_2 = (z_1 - z_2)e^{\pm \frac{i\pi}{3}}$$

**OME 15. Problema 1. Sugerencia**

El área de una elipse de semiejes $a$ y $b$ es $S = \pi ab$, y su ecuación centrada en $(x_0, y_0)$ es

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1;$$

una circunferencia de radio $r$ se puede considerar una elipse de semiejes $a = b = r$.

**OME 15. Problema 2. Sugerencia**

Recordar que un movimiento conserva las distancias. Busca dos puntos que no queden a la misma distancia. Para la segunda parte, piensa en qué letras quedan igual tras una simetría.

**OME 15. Problema 3. Sugerencia**

*Solución algebraica.* Observar que $(1+x)^n(1+x)^n = (1+x)^{2n}$ y aplicar la fórmula del binomio, fijándose en el término de grado $n$.

*Solución combinatoria.* Tomar $X = \{a_1, a_2, \dots, a_m, b_1, b_2, \dots, b_n\}$ y contar los subconjuntos de $r$ elementos que tiene $X$, teniendo en cuenta los $a_i$ o $b_i$ que contienen. Particularizar para $r = m = n$.

## OME 15. Problema 4. Sugerencia

Estudiar la naturaleza de $z_1$ y $z_2$ teniendo en cuanta que $a$ y $b$ son reales. Usar la fórmula de De Moivre.

SE

**OME 15. Problema 5. Sugerencia**

Trasladar la función tres unidades a la izquierda.

## OME 15. Problema 6. Sugerencia

Considerar primero qué bolas puede haber en la caja y con qué probabilidad se dará cada situación. Luego, para cada una de ellas, calcular la probabilidad de obtener las 4 bolas blancas. Usar las fórmulas de la probabilidad condicionada.

## OME 15. Problema 7. Sugerencia

Intentar hallar el volumen del toro utilizando una integral. Recordar que el volumen generado al girar la gráfica de $f(x)$ alrededor del eje $OX$ en el intervalo $[a, b]$ es

$$\pi \int_a^b \big(f(x)\big)^2 \, dx \, .$$

**OME 15. Problema 8. Sugerencia**

Estudiar lo que ocurre con el término independiente y con los de grado mayor que 2 de un polinomio $p(x)$ al derivarlo. Evaluar $p'(0)$.

SE

**OME 16. Problema 1. Sugerencia**

Fijando el lado conocido, hallar el lugar geométrico de los posibles vértices opuestos y razonar cómo ha de ser el triángulo área máxima. Aplicar trigonometría a este triángulo para calcular los datos que se piden.

SE

**OME 16. Problema 2. Sugerencia**

Abordar el problema mediante un diagrama de árbol. Razonando algunos detalles puede simplificarse bastante su construcción.

**OME 16. Problema 3. Sugerencia**

Intentar aplicar alguna desigualdad conocida para obtener el enunciado.

**OME 16. Problema 4. Sugerencia**

Observar en primer lugar que si $f(x) \neq 0$ para todo $x$, podemos escribir

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = -x^2.$$

Integrando cada miembro de la igualdad (el de la izquierda es de tipo logarítmico) y usando que $f(1) = e$, despejar el valor de la función y representarla, usando las técnicas habituales.

## OME 16. Problema 5. Sugerencia

Considerando

$$a_n = x^n + \frac{1}{x^n},$$

comenzar probando que $a_{n+1} = a_n\, a_1 - a_{n-1}$ y utilizar esta condición para demostrar por inducción completa el enunciado, utilizando la fórmula trigonométrica

$$\cos A + \cos B = \frac{1}{2}\Big(\cos(A+B) + \cos(A-B)\Big).$$

**OME 16. Problema 6. Sugerencia**

Observar que la expresión algebraica en que se traduce el enunciado es

$$n(n+1)(n+2)(n+3)+1$$

y desarrollarla. Para ver que siempre es un cuadrado perfecto, basta factorizar el polinomio resultante.

## OME 16. Problema 7. Sugerencia

En primer lugar, observar que las ecuaciones paramétricas de dicho punto son $x = \lambda^2$, $y = (2-\lambda)^2$, con $\lambda \in [0,2]$. Eliminando el parámetro se puede calcular el área mediante una integral. Por otro lado, aplicar el giro de 45° para obtener la ecuación

$$y' = \frac{\sqrt{2}}{4}\,{x'}^2 + \sqrt{2}$$

y deducir de esta fórmula cómo es la curva.

**OME 16. Problema 8. Sugerencia**

La fórmula de Herón para el área de un triángulo conocidos los lados es

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

siendo $p$ el semiperímetro. Suponiendo que los números sean $n$, $n+1$, $n+2$ y $n+3$, sustituirlos por $S, a, b, c$ según las distintas ordenaciones posibles para obtener todas las soluciones.

## OME 17. Problema 1. Sugerencia

Escribir la suma como $7\,(1 + 11 + 111 + \cdots + 111\ldots111)$ y descomponer cada uno de los sumandos del paréntesis como potencias de diez.

**OME 17. Problema 2. Sugerencia**

Desarrollar el lateral del vaso como un rectángulo y dibujar sobre él las posiciones de la gota y la mosca. Así el problema queda reducido a calcular la mínima distancia entre los dos puntos del plano tocando el borde del vaso.

## OME 17. Problema 3. Sugerencia

Considerando $\alpha$ el ángulo buscado, demostrar que las direcciones de $r$ y $u$ forman un ángulo $2\alpha$, al igual que las de $s$ y $v$, y deducir que las direcciones de $u$ y $v$ forman un ángulo $3\alpha$. Concluir que $\alpha = 60°$.

## OME 17. Problema 4. Sugerencia

Expresar $\operatorname{sen}(x-2) = \operatorname{sen}\big((x-1)-1\big)$ y desarrollarlo como el seno de una diferencia de ángulos. Simplificar la expresión resultante y entonces aplicar el cambio de variable $t = \tan(x-1)$. La integral resultante puede tratarse como una de tipo racional.

## OME 17. Problema 5. Sugerencia

Representar la función para los primeros valores de $n$ e indicar cómo se comporta para demás valores. Las integrales y el límite no presentan problemas.

S E

**OME 17. Problema 6. Sugerencia**

En primer lugar, descomponer la simetría respecto del punto $(0, 0)$ como producto de dos simetrías axiales de ejes perpendiculares $x - y = 0$ y $x + y = 0$. El movimiento queda expresado como producto de tres simetrías axiales. Observar ahora que dos de los ejes son paralelos resultando la traslación buscada.

**OME 17. Problema 7. Sugerencia**

Aplicar directamente el teorema de Bayes (o teorema de la probabilidad inversa) a los datos del problema.

**OME 17. Problema 8. Sugerencia**

Como a es impar, será de la forma $2k+1$. Sustituyendo este valor se obtiene otro polinomio en la indeterminada $k$. De esta expresión resulta inmediato que el resultado es múltiplo de 4. Para el primer apartado basta utilizar convenientemente la fórmula del cuadrado de una suma.

## OME 18. Problema 1. Sugerencia

Resolver la ecuación diofántica en que se traduce el enunciado y observar que, con las restricciones que se tienen, la solución no es única.

## OME 18. Problema 2. Sugerencia

Descomponer la rotación como dos simetrías axiales definidas por ejes que pasan por el punto $P$ y ángulo $45°$ entre ellas. Trabajar entonces con tres simetrías axiales.

**OME 18. Problema 3. Sugerencia**

El problema se reduce a calcular

$$\lim_{n\to\infty}\left\{1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\cdots+\frac{(-1)^n}{n}\right\}.$$

El criterio de Leibnitz asegura la convergencia de esta serie. Para calcular el límite, basta desarrollar en serie de potencias la función $f(x)=\log(1+x)$ centrándose en el punto 0 y sustituir $x=1$. Concluir que la altura final es $120\log 2$.

**OME 18. Problema 4. Sugerencia**

La condición es equivalente a que $p\left(\sqrt{x^2+y^2}\right) \leq x^4 + y^4$.

i) Tomando $y = 0$, $x > 0$ y $p(x) = a_1 x + \cdots + a_n x^n$, la desigualdad queda

$$\frac{a_1}{x^3} + \frac{a_2}{x^2} + \frac{a_1}{x} + a_4 + a_5 x + \cdots + a_n x^{n-4} \leq 1.$$

Tomando límites en 0 y $+\infty$ de $x$, demostrar que han de ser $a_1 = a_2 = a_3 = a_5 = \cdots = a_n = 0$.

ii) Deducir del apartado anterior y de la desigualdad que $p(x) = ax^4$, $a \leq 1$, con lo que la desigualdad inicial queda $a(\xi + \eta)^2 \leq \xi^2 + \eta^2$ para $\xi, \eta > 0$.

iii) Transformar esta última desigualdad en

$$\xi\,\eta \leq 2(1-a)\left(\frac{\xi+\eta}{2}\right)^2$$

y deducir de la desigualdad entre media aritmética y geométrica que $0 \leq a \leq 1/2$.

S E

**OME 18. Problema 5. Sugerencia**

Construir un cuadrado cualquiera, hallando la suma del lado y la diagonal y después pasar a una figura semejante que tenga esta longitud igual a la dada.

**OME 18. Problema 6. Sugerencia**

Distinguir $\nu = 0$ y $\nu \neq 0$. En el segundo caso, $u = \lambda\nu$ y la desigualdad se traduce en $\lambda^a \leq \lambda\, a + 1 - a$. Estudiar la función $f(\lambda) = \lambda\, a + 1 - a - \lambda^a$.

**OME 18. Problema 7. Sugerencia**

Expresar la suma y el producto de dos fracciones $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$ de $S$ y observar cómo son sus denominadores. Para la tercera pregunta, probar con varias fracciones.

**OME 18. Problema 8. Sugerencia**

Empezar por probar que para un punto $M=(x,y)$ se cumple

$$d(M,C)=\begin{cases} d(M,A) & \text{si} \quad x<\frac{3}{2} \\ d(M,B) & \text{si} \quad x\geq\frac{3}{2} \end{cases}; \qquad d(M,C')=\begin{cases} d(M,A') & \text{si} \quad y<4 \\ d(M,B') & \text{si} \quad y\geq 4 \end{cases}$$

y discutir los posibles casos en que se da la igualdad para obtener como la gráfica de una función definida a trozos el conjunto buscado, y estudiar su derivabilidad.

## OME 19. Problema 1. Sugerencia

Considerar el ángulo $\alpha$ que forman el perro $P$, el centro $C$ de la columna y un punto de tangencia $T$, es decir, $\widehat{PCT}$. Si la longitud de la cuerda es constante $\ell$, expresar la distancia del perro al centro de la columna como función de $\alpha$ usando trigonometría. Observar ahora que la distancia a la que se rompe el nudo se alcanza en el punto en que se maximiza dicha distancia del perro al centro de la columna, justamente en $\pi/6$.

# OME 19. Problema 2. Sugerencia

Encontrar primero la forma de dibujar el ángulo y la circunferencia inscrita. Después dibujar sobre los lados dos longitudes que satisfagan la proporción y aplicar el teorema de Thales para dibujar el verdadero lado.

# OME 19. Problema 3. Sugerencia

Comenzar probando que

$$A_k = r^2 \operatorname{sen} \frac{k\pi}{n+1}$$

y a partir de esa fórmula expresar el límite de las medias aritméticas como

$$\lim S_n = \frac{r^2}{\pi} \lim \left( \frac{\pi}{n+1} \sum_{k=1}^{n} \frac{k\pi}{n+1} \right)$$

¿Qué relación existe entre este límite y

$$\int_0^{\pi} \operatorname{sen} x \, dx \text{ ?}$$

**OME 19. Problema 4. Sugerencia**

Observar que el enunciado equivale a hallar el número de puntos de corte de la curva $y = 16x^5 - 20x^3 + 5x$ con la recta $y = -m$. Esto puede hacerse de forma especialmente fácil al calcular los extremos de la función cuya gráfica describe la primera curva.

**OME 19. Problema 5. Sugerencia**

Utilizando el hecho de que al girar el punto $A$ un ángulo de $90°$ ó $-90°$ con centro en el punto $B$ tiene que coincidir con el punto $C$, calcular las posibles posiciones del punto $A$. Cuando se obtiene $A$ no es difícil calcular los demás vértices.

**OME 19. Problema 6. Sugerencia**

Intentar expresar los menús de los que queremos hallar el precio como combinación lineal de los que ya sabemos cuánto cuestan.

## OME 19. Problema 7. Sugerencia

Observar que el hueco que queda vacío en el tetraedro después de echar el agua es otro tetraedro y calcular su altura. La altura que alcanza el agua puede hallarse como la diferencia entre la altura total y la de este tetraedro.

# OME 19. Problema 8. Sugerencia

Expresar ordenadamente las edades $x, y, z$ en 1960 de los hermanos. De la primera condición $x = y + z$ en 1960 y la segunda unos años después se puede llegar a que han de ser $y = 2z$, $x = 3z$. De la tercera condición pueden deducirse los valores exactos.

**OME 20. Problema 1. Sugerencia**

Girando la dirección $AB$, reducir el problema a construir un trapecio isósceles conociendo la suma de las bases $\ell$, la altura (distancia entre $AB$ girada y $CD$) y que está inscrito en una circunferencia centrada en $O$.

# OME 20. Problema 2. Sugerencia

Averiguar qué valores puede tomar la última cifra del número para que esto ocurra. Discutir cuáles pueden ser las demás cifras para cada uno de estos valores.

**OME 20. Problema 3. Sugerencia**

Para las dos primeras desigualdades es suficiente usar las desigualdades $(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2 \geq 0$ y $(x-y)^2 \geq 0$. Para la tercera, tomando $m = p + \frac{1}{p}$ y $n = q + \frac{1}{q}$, probar primero que $p\,q \leq \frac{1}{4}$ y deducir que $m+n \geq 5$ y $m^2+n^2 \geq 25-2m\,n$. Con ello demostrar la desigualdad buscada.

## OME 20. Problema 4. Sugerencia

Transformar la expresión a la que hay que calcularle el límite usando reiteradamente la fórmula del seno del ángulo mitad.

## OME 20. Problema 5. Sugerencia

Situando unos ejes de coordenadas en el punto medio del segmento que une los centros, comprobar que podemos expresar

$$A = (-d + \cos a,\, \operatorname{sen} a), \quad A' = (d + \cos b,\, \operatorname{sen} b)$$
$$B = \big(-d + \cos(a+x),\, \operatorname{sen}(a+x)\big), \quad B' = \big(d + \cos(a+x),\, \operatorname{sen}(a+x)\big).$$

Calcular el punto medio $M$ de coordenadas $(M_x, M_y)$ y probar que en el primer supuesto $M_x^2 + M_y^2$ es constante mientras que en el segundo $\overrightarrow{OM}$ tiene siempre la misma dirección.

S E

## OME 20. Problema 6. Sugerencia

La recta a distancia 3 del eje $OX$ es la $y = 3$ y tomando como parámetro el ángulo $t$ que forma la recta variable con el eje $OX$, ver que las coordenadas paramétricas de un punto del lugar geométrico buscado son

$$\left( \frac{3}{\tan t}\, ,\, 3 \operatorname{sen} 2t \right)$$

y calcular a partir de ellas la ecuación de la curva que describe dicho punto.

## OME 20. Problema 7. Sugerencia

Si el número en cuestión es de $p+1$ cifras, expresarlo como $a \cdot 10^p + x$, donde $a$ es la última cifra. Observar que con esta expresión, el número queda dividido por $k$ al eliminar la última cifra cuando $a \cdot 10^p + x = k\,x$. Transformar esta expresión para obtener la condición buscada.

**OME 20. Problema 8. Sugerencia**

Deducir que si el polinomio definido por el determinante es $P(x)$, existe otro polinomio $C(x)$ tal que $P(x) = (x^2 - 1)C(x) + (ax + b)$. Calcular $a$ y $b$ dándole valores convenientes a $x$.

**OME 21. Problema 1. Sugerencia**

Estudiar por separado los casos: $f$ no tiene ningún punto fijo o $f$ tiene un punto fijo. ¿Qué ocurre si $f$ tiene dos o más puntos fijos?

**OME 21. Problema 2. Sugerencia**

Tomar un semiplano del plano y estudiar las propiedades del subconjunto de $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ contenido en él.

## OME 21. Problema 3. Sugerencia

Hay varias soluciones posibles, como intentar expresar una de las razones trigonométricas de la ecuación en función de otra razón trigonométrica para luego resolver la nueva ecuación, más fácil. Otra solución consiste en sustituir la tangente por la razón del seno y coseno para luego usar seno de sumas de ángulos, y de ángulos dobles.

## OME 21. Problema 4. Sugerencia

Para el primer apartado intentar factorizar la expresión usando el cubo de tres sumandos. Para el segundo, piensa en dos casos posibles de $k$, y busca las ternas que cumplan lo pedido.

## OME 21. Problema 5. Sugerencia

Intenta encontrar una raíz de forma sencilla.

**OME 21. Problema 6. Sugerencia**

Probar que el punto $P$ es el centro del círculo exinscrito al triángulo $AMN$ correspondiente al lado $AN$.

## OME 21. Problema 7. Sugerencia

Expresar el polinomio como producto del segundo polinomio y de otro, e igualar coeficientes para obtener un sistema del que obtener la solución.

S E

# OME 21. Problema 8. Sugerencia

Intentar resolver las ecuaciones que provienen de la suma y productos constantes dependiendo del valor de algunos coeficientes.

**OME 22. Problema 1. Sugerencia**

Buscar una función cuya imagen en el plano corresponde a la distancia del enunciado y trabajar con ella.

**OME 22. Problema 2. Sugerencia**

En el apartado b), se puede pensar en qué pasaría si se iterase el proceso de dividir el lado del pentágono interior, teniendo en cuenta la relación que hay entre la diagonal y el lado del pentágono, además de la relación entre el lado del pentágono y el lado del pentágono interior.

**OME 22. Problema 3. Sugerencia**

Estudiar por tanteo primero la ecuación $5^n + 3 = 2^m$ para $m = 7$. Posteriormente, para $m > 7$, trabajar con congruencias $5^n + 3 \equiv 0 \bmod 2^8$.

## OME 22. Problema 4. Sugerencia

Si la primera y segunda derivada son positivas, la función es convexa creciente.

**OME 22. Problema 5. Sugerencia**

Elegir un punto convenientemente en el eje de ordenadas y su opuesto. Hacer pasar una recta por ese punto y de pendiente $t$ arbitraria. Determinar $t$ para que el punto de intersección de la recta con la curva tenga coordenadas racionales.

**OME 22. Problema 6. Sugerencia**

Se puede usar la factorización de $z^{15}-1$ considerando las 15 raíces complejas de la unidad para el calcular el producto de los 7 primeros factores. Después se debe dar un valor a la $z$ para que los cálculos del producto sean fáciles de resolver.

**OME 23. Problema 1. Sugerencia**

Trácese una tangente y dibújese las otras calculando ángulos de 60°. Para calcular las áreas se puede tener en cuenta que si desde un punto $P$ del plano se trazan perpendiculares a los tres lados de un triángulo equilátero, se obtienen 3 segmentos cuya suma (con los signos que convenga) es igual a la altura del triángulo.

## OME 23. Problema 2. Sugerencia

Usa una conocida desigualdad de vectores y normas.

**OME 23. Problema 3. Sugerencia**

Se debe pensar en un caso base y como van aumentando las variables cuando se incrementa el número de vértices.

**OME 23. Problema 4. Sugerencia**

Usar el método de sustitución en ambos sistemas. El primero es inmediato, mientras que el segundo se debe intentar expresar la inecuación como factores en los que algunos no cambian de signo.

## OME 23. Problema 5. Sugerencia

Dibuja $DF$, paralela a $BC$. El triángulo $GDF$ será equilátero. Probar además que el triángulo $GEF$ es isósceles.

## OME 23. Problema 6. Sugerencia

Se puede usar teoremas conocidos del análisis matemático, usando puntos como 0 y 3/4.

## OME 24. Problema 1. Sugerencia

Para un usar el principio del palomar con los pares $\{1, k+1\}$, $\{2, k+2\}$, ... , $\{k, k+k\}$ como agujeros.

## OME 24. Problema 2. Sugerencia

Razona de forma inductiva.

**OME 24. Problema 3. Sugerencia**

Probar la equivalencia de $25x + 31y$ y $3x + 7y$ módulo 41.

## OME 24. Problema 4. Sugerencia

Hay que intentar demostrar $a_{n+m} = a_{n-1}a_m + a_n a_{m+1}$ mediante inducción en una de las variables.

Otra solución sería pensar en otra recurrencia (forma de subir escaleras si se pueden subir los peldaños de uno en uno o de dos en dos) y pensar en la solución para subir $2n+1$ peldaños, y después intentar asociar la solución a la sucesión de Fibonacci.

**OME 24. Problema 5. Sugerencia**

Pensar en embaldosado de cruces.

SE

**OME 24. Problema 6. Sugerencia**

Reescribir la ecuación como producto de polinomios y cuadrado de una expresión de $t$ para calcular más fácilmente las soluciones para $x$.

**OME 25. Problema 1. Sugerencia**

Estudiar primero los primeros casos y expresar la probabilidad de forma general.

**OME 25. Problema 2. Sugerencia**

Utilizar el siguiente hecho: si dos triángulos tienen la misma altura, entonces la relación de áreas es igual a la de las bases; o bien que si tienen la misma base, la relación de áreas es la de las alturas.

## OME 25. Problema 3. Sugerencia

Tomar el cuadrado de la fracción del centro. Sustituir convenientemente factores de esta fracción para obtener una nueva fracción mayor (respectivamente, menor) que otra que se puede simplificar.

## OME 25. Problema 4. Sugerencia

Comprobarlo para $n = 1$ e intentar usar esta expresión para potencias pares e impares.

Expresar 14 como el producto de 2 elementos de $D$ y obtener la solución dependiendo del valor de alguna de las variables.

**OME 25. Problema 6. Sugerencia**

Suponer $a$ y $b$ como razones trigonométricas.

S E

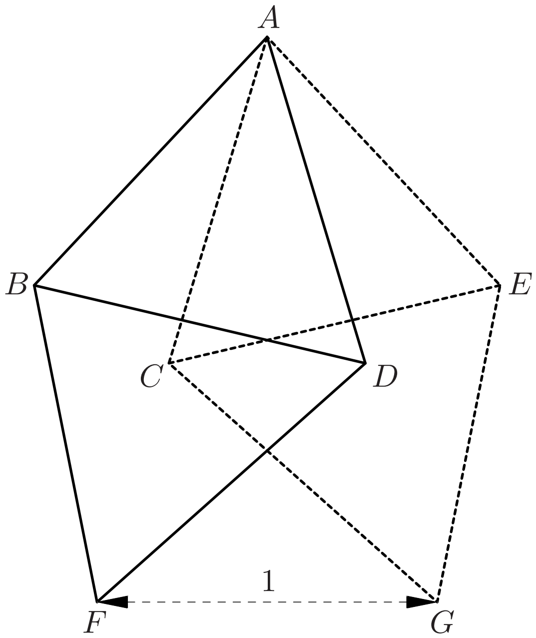
## OME 26. Problema 1. Sugerencia

a) Comparar $A^2$ con $B^2$.

b) Expresar el término que está debajo de la raíz del número $M$ como un cuadrado. Simplificar y comparar los dos nuevos números elevando al cuadrado cada uno de ellos.

**OME 26. Problema 2. Sugerencia**

Razonar en base a la siguiente figura, en la que cada lado es de longitud 1.



## OME 26. Problema 3. Sugerencia

Considerar el número

$$E = \left(4 + \sqrt{11}\right)^n + \left(4 - \sqrt{11}\right)^n.$$

Desarrollar según la fórmula del binomio de Newton.

**OME 26. Problema 4. Sugerencia**

Considerar los siguientes cambios de variable

$$\begin{aligned} x &= \frac{a+1}{2} + \frac{a+3}{6}\sqrt{\frac{4a+3}{3}} \\ y &= \frac{a+1}{2} - \frac{a+3}{6}\sqrt{\frac{4a+3}{3}} \\ z &= x + y. \end{aligned}$$

dada la suma inicial, elevar al cubo y obtener un polinomio en $Z$. Encontrar la única raíz real de ese polinomio y demostrar que condición necesaria y suficiente para que sea única es que $a \geq -\dfrac{3}{4}$.

**OME 26. Problema 5. Sugerencia**

a) y b) Expresar los lados en función de los lados originales y del parámetro $p$.

c) Aplicar el teorema de Menelao para una elección conveniente de puntos.

S E

## OME 26. Problema 6. Sugerencia

Considérese un punto $A$ y el conjunto de puntos que están unidos con él. Estudiar entoncesuno a uno los triángulos con vértices $A$ y un par de dichos puntos. El ángulo en $A$ debe ser mayor que $60°$ y no puede haber más de cinco putos unidos con $A$.

**OME 27. Problema 1. Sugerencia**

a) Demostrar por contradicción. Tomando tres puntos que cumpliesen las condiciones del enunciado, por el teorema del coseno resultaría que $\cos 45°$ sería un número racional.

b) Razonamiento idéntico.

**OME 27. Problema 2. Sugerencia**

Calcular el resultado de multiplicar la primera fila por $\lambda$, la segunda por $1 - \lambda$ y sumarlas. Demostrar que, para $n \geq 3$, podemos conseguir la fila que queramos, simplemente modificando el valor de $\lambda$.

## OME 27. Problema 3. Sugerencia

Usar las fórmulas de Cardano-Vieta. La condición necesaria y suficiente para que $a$, $b$, $c$ sean los lados de un triángulo, es que

$$(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)>0\,.$$

## OME 27. Problema 4. Sugerencia

Utilizando ángulos y observando que $AC'DB'$ es simétrico respecto de $AD$, demostrar que el ángulo $\widehat{ICB}$ vale $C/2$. Los puntos $I$, $B'$, $C$ y $D$ son concíclicos.

## OME 27. Problema 5. Sugerencia

Probar por inducción que $\sigma(k) = 2^{k-1} + 1$.

*Observación:* La función $\sigma$ está extendida a los naturales, no a las potencias de 2.

# OME 27. Problema 6. Sugerencia

Observar que

$$\frac{1}{\sqrt{k}} > \frac{2}{\sqrt{k}+\sqrt{k+1}},$$
$$\frac{1}{\sqrt{k}} < \frac{2}{\sqrt{k}+\sqrt{k-1}}.$$

**OME 28. Problema 1. Sugerencia**

Probar todos los casos sabiendo que el número de divisores de un número $n = p_1^{\alpha_1}\, p_2^{\alpha_2} \cdots p_r^{\alpha_r}$ es $d(n) = (\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1) \cdots (\alpha_r + 1)$

## OME 28. Problema 2. Sugerencia

Trasladar una de las circunferencias paralelamente a lo largo de la dirección dada una distancia conveniente para que la intersección con la otra circunferencia determine el punto solución.

SE

**OME 28. Problema 3. Sugerencia**

Expresar las fórmulas del enunciado en función de los números triangulares.

**OME 28. Problema 4. Sugerencia**

Suponer que hay un número finito de primos de la forma $4n+3$. Considerar el número $q = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdots p - 1$, siendo $p$ el último primo de la forma $4n+3$.

**OME 28. Problema 5. Sugerencia**

Construcción del punto $P$:

a) Trazar la circunferencia que pasa por $A$ y es tangente en $B$ al lado $BC$.

b) La paralela por $B$ al lado $AC$ corta en $M$ a la circunferencia anterior.

c) La intersección de la recta $CM$ con la circunferencia determina $P$.

Usar el teorema de los senos en $APC$ y $BPC$.

**OME 28. Problema 6. Sugerencia**

Hacer el cambio $z = \cos t + i \sin t$ y utilizar la fórmula de De Moivre.

## OME 29. Problema 1. Sugerencia

Aplicar directamente el principio del palomar.

**OME 29. Problema 2. Sugerencia**

Expresar la suma de los números de cada fila en función de la fila anterior primero, y en función de la primera fila después.

S E

**OME 29. Problema 3. Sugerencia**

Expresar, en función de las longitudes de los lados y de los radios, los valores del área. Se necesita después la desigualdad aritmético-geométrica.

**OME 29. Problema 4. Sugerencia**

Considerar el conjunto $\{1, 10, 10^2, \ldots, 10^{n-1}\}$ y sus restos módulo $p$. Aplicar el principio del palomar.

**OME 29. Problema 5. Sugerencia**

Estudiar todas las posibilidades (tres) teniendo en cuenta las simetrías determinadas por las diagonales.

## OME 29. Problema 6. Sugerencia

a) Estudiar la probabilidad de que la bola llegue a $C$ o a $D$.

b) La duración del juego es un número par de movimientos. Observar que la duración media es una serie aritmético-geométrica, y sumarla.

# OME 30. Problema 1. Sugerencia

Obsérvese que $(a+d)^2 = a^2 + d(2a+d)$.

## OME 30. Problema 2. Sugerencia

Resolverlo por geometría analítica.

## OME 30. Problema 3. Sugerencia

Considerar la suma de días, módulo 4.

**OME 30. Problema 4. Sugerencia**

Expresar las proporciones entre los triángulos semejantes.

## OME 30. Problema 5. Sugerencia

Primero descartar las combinaciones Negro-Negro-Negro y Blanco-Blanco-Blanco y luego aplicar el principio del palomar.

## OME 30. Problema 6. Sugerencia

a) Contar el número de triángulos y de lados.

b) Demostrar por inducción sobre el número de vértices, que dicho número es $\dfrac{m-n+2}{2}$.

**OME 31. Problema 1. Sugerencia**

¿Cuántas veces aparece cada lado en la suma total $S(A)$? ¿Cuál es el valor mínimo que puede tener el menor elemento del conjunto $A$?

S E

## OME 31. Problema 2. Sugerencia

Dibujar la situación del enunciado en el espacio con ejes coordenados $X$, $Y$, $Z$. Recordar que dados dos puntos en una esfera, el centro se encuentra en el plano mediatriz de dichos puntos.

**OME 31. Problema 3. Sugerencia**

El producto en cuestión se puede expresar como función de una sola variable. Con este fin, utilizar vectores o triángulos semejantes.

**OME 31. Problema 4. Sugerencia**

Si $\mathrm{mcd}\,(a, a') = 1$ y $a\,x = a'\,x'$, entonces $a\,x'$ es múltiplo de $a$. (Se supone que todas estas variables son números enteros).

**OME 31. Problema 5. Sugerencia**

Despejar $n$ de la primera ecuación y sustituir en la segunda.

**OME 31. Problema 6. Sugerencia**

a) Considerar las circunferencias circunscritas a los tres triángulos y sus puntos de intersección.

b) ¿Cuánto vale el ángulo $\widehat{APB}$?

c) Puede resolverse mediante geometría analítica. Alternativamente, obsérvese que que un lado del triángulo formado por los circuncentros es perpendicular a $CP$ y el otro es perpendicular a $AP$.

d) Nótese que los ángulos $\widehat{B''PA''}$ y $\widehat{B''CA''}$ son iguales.

**OME 32. Problema 1. Sugerencia**

Demostrar que en las condiciones del problema, $a+b$ es un múltiplo de $\left(\operatorname{mcd}(a,b)\right)^2$

**OME 32. Problema 2. Sugerencia**

Usar el teorema del coseno para calcular la longitud de las medianas, y expresar la relación del enunciado de tal manera que se pueda sacar $c - b$ como factor común.

S E

**OME 32. Problema 3. Sugerencia**

Escribir el polinomio en la forma $f(x) = Ax(x+1) + Bx(x-1) + C(x-1)(x+1)$ para ciertas constantes $A$, $B$, $C$.

## OME 32. Problema 4. Sugerencia

Aislar un radical y elevar al cuadrado.

## OME 32. Problema 5. Sugerencia

Para un agente dado, ¿cuántos de los demás no le espían ni son espiados por él? ¿Qué sucede si el número de estos agentes es cero?

S E

## OME 32. Problema 6. Sugerencia

Se trata de calcular el volumen de una pirámide pentagonal truncada.

**OME 33. Problema 1. Sugerencia**

Recordar que $1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

**OME 33. Problema 2. Sugerencia**

Empezar dividiendo el cuadrado en conjuntos disjuntos de puntos de tal manera que como mucho dos de los puntos elegidos estén en cada conjunto.

## OME 33. Problema 3. Sugerencia

Calcular la ecuación de la circunferencia. ¿Qué debe ocurrir con los coeficientes de $p$ y $q$ para que haya un punto $(x, y)$ tal que, al sustituir en la ecuación, el resultado no dependa de $p$ ni de $q$?

**OME 33. Problema 4. Sugerencia**

Considerar la condición del enunciado como una ecuación cuadrática en $k$. ¿Cuándo serán enteras sus raíces?

**OME 33. Problema 5. Sugerencia**

Demostrar, por separado, que la suma de los lados es mayor o igual que 4, y que la suma de las diagonales es mayor o igual que $\sqrt{2}$. Recordar que es posible acotar la suma de dos números a partir de su producto.

**OME 33. Problema 6. Sugerencia**

Dibujar la gráfica del combustible restante en cada momento de un recorrido completo, empezando en un depósito cualquiera. ¿Cuál sería la gráfica empezando desde otro depósito?

## OME 34. Problema 1. Sugerencia

Demostrar que $AP = PA'$ y que $A'M = MB$.

S E

**OME 34. Problema 2. Sugerencia**

Hay sólo 12 cubos de 4 cifras, y un sencillo argumento de divisibilidad nos deja son sólo tres posibilidades.

**OME 34. Problema 3. Sugerencia**

Los triángulos $ABC$, $ADC$ y $ABE$ son semejantes.

## OME 34. Problema 4. Sugerencia

¿Cuánto vale la tangente de la suma de tres ángulos?

**OME 34. Problema 5. Sugerencia**

Sabemos que si $y > x$ es $f(y) - f(x) \geq y - x$. Demostrar que siempre se tiene la igualdad.

# OME 34. Problema 6. Sugerencia

Colorear cada casilla como en un tablero de ajedrez. ¿De qué color son las casillas ocupadas por las piezas?

## OME 35. Problema 1. Sugerencia

Para calcular el área, expresar ésta como suma de las áreas de dos triángulos, ambos con base $m$.

# OME 35. Problema 2. Sugerencia

Dado cualquier $k$ entero, encontrar un entero $x$ tal que $k^2 + x^2$ sea cuadrado perfecto.

## OME 35. Problema 3. Sugerencia

¿Cuántas veces se la ha dado la vuelta a la última ficha al retirarla?

**OME 35. Problema 4. Sugerencia**

¿Cuántas cartas pueden aberse sacado si todas las sumas aparecen dos veces o menos?

**OME 35. Problema 5. Sugerencia**

a) Calcular $g_a$, $g_b$, $g_c$ en términos del área del triángulo y las longitudes de los lados.

b) Utilizar la desigualdad entre las medias aritmética y armónica.

# OME 35. Problema 6. Sugerencia

Una vez añadidas las rectas de los dos primeros tipos, ¿cómo aumento el número de regiones al añadir cada recta del tercer tipo? ¿Es posible acotar el número de regiones en función únicamente del número total de rectas?

## OME 36. Problema 1. Sugerencia

Las raíces comunes a dos polinomios son también raíces de su diferencia.

**OME 36. Problema 2. Sugerencia**

Tras una breve observación de la figura se deduce que las dos personas sólo se pueden encontrar en cuatro segmentos; por tanto, resta calcular las respectivas probabilidades de encuentro en cada segmento.

**OME 36. Problema 3. Sugerencia**

Sea $O$ el punto medio del segmento que une los centros de las dos circunferencias. El punto $M$ es el simétrico del punto $B$ respecto de $O$.

## OME 36. Problema 4. Sugerencia

Si $z = E(N/3)$, entonces $z$ es uno de los 9 múltiplos de 111 con tres cifras y además cumple que existe un natural $n$ tal que $z = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

## OME 36. Problema 5. Sugerencia

Considera el cuadrilátero formado por los cuatro puntos y distingue dos casos, según que sea cóncavo o convexo.

**OME 36. Problema 6. Sugerencia**

Intenta demostrar por inducción que $f(n) = f(0) + n$.

## OME 37. Problema 1. Sugerencia

Primero comprueba que que si existe el polinomio $Q$, entonces $P$ es simétrico respecto de $A$.

Para la otra implicación ayúdate de un polinomio $R$ tal que $R(h) = P(a + h)$.

S E

## OME 37. Problema 2. Sugerencia

Observa que los triángulos $ACB$, $PBQ$ y $APR$ son semejantes.

SE

**OME 37. Problema 3. Sugerencia**

¿Qué relación cumplen los lados de un triángulo para que éste sea obtusángulo? Utiliza estas relaciones obtenidas por medio del teorema del coseno junto con la desigualdad triangular.

## OME 37. Problema 4. Sugerencia

La suma de los números 1 al 9 es múltiplo de 9, pero 2001 no lo es.

## OME 37. Problema 5. Sugerencia

Intenta expresar la condición de que el cuadrilátero admite circunferencia inscrita como una ecuación que tenga solamente como incógnitas la longitud del lado $CD$ y las razones trigonométricas de un ángulo.

**OME 37. Problema 6. Sugerencia**

Haz una tabla de valores y encuentra una relación entre $f(n)$ y la representación de $n$ en base 2.

## OME 38. Problema 1. Sugerencia

Calcula $P(0)$ y, a partir de sus posibles valores, los polinomios $P$.

**OME 38. Problema 2. Sugerencia**

a) Utiliza que los ángulos $BA'H$ y $CA'H$ son rectos para obtener relaciones métricas a partir del seno y del coseno de los ángulos $B$ y $C$.

b) Toma unos ejes con centro el punto medio de $BC$ e intenta expresar la condición que has obtenido en el párrafo anterior.

**OME 38. Problema 3. Sugerencia**

Haz una tabla de valores y encuentra una relación entre $f(n)$ y la representación de $n$ en base 2.

# OME 38. Problema 4. Sugerencia

Sea $n = abc$. Sustituye en la expresión del enunciado y utiliza los módulos adecuados para imponer condiciones sobre $a$, $b$, $c$.

**OME 38. Problema 5. Sugerencia**

Cada segmento determina dos vectores de sentidos opuestos. Une los 4004 vectores para obtener un polígono.

SE

**OME 38. Problema 6. Sugerencia**

Cada lado o diagonal del polígono pertenece exactamente a tres triángulos isósceles distintos. Divide tanto los lados y diagonales com los triángulos según su coloración, e intenta buscar expresiones que relacionen la cantidad de unos con la de otros.

## OME 39. Problema 1. Sugerencia

Considera los $p$ primeros números compuestos sólo por nueves. ¿Existirán dos que den el mismo resto al dividir por 9?

**OME 39. Problema 2. Sugerencia**

Al ser $M$ finito, estará acotado, $M \subset [x, y]$. Aplica la propiedad cel conjunto a los elementos $x$ e $y$ hasta llegar a una contradicción con la existencia de $M$.

**OME 39. Problema 3. Sugerencia**

Considera primero el caso $C < 90°$. Sea $A'$ el pie de la altura por $A$. Intenta demostrar que los triángulos $CHA'$ y $A'AB$ son congruentes.

**OME 39. Problema 4. Sugerencia**

Prueba primero que $x$ no puede ser entero y luego, haciendo $x = p/q$, que tampoco puede ser racional.

## OME 39. Problema 5. Sugerencia

Prolonga los lados para formar un triángulo equilátero.

Considera la diferencia entre bolas blancas y negras de las $2n$ primeras bolas, y después, de las $2n$ últimas. A medida que te desplazas por la cadena, ¿cómo puede variar la diferencia?

**OME 40. Problema 1. Sugerencia**

Halla primero la suma de cada fila en función de su primer y último elemento, y luego suma todas las filas.

**OME 40. Problema 2. Sugerencia**

Los cuadriláteros $TPZD$ y $TOZD$ tienen la misma área.

**OME 40. Problema 3. Sugerencia**

Prueba por inducción que para todo $n$ entero se cumple $f\big(x + n\,f(y)\big) = f(x) - n\,y$.

## OME 40. Problema 4. Sugerencia

Observa que si un número se forma reordenando los dígitos de otro, entonces los dos dejan el mismo resto al dividirlos por 9.

## OME 40. Problema 5. Sugerencia

Utiliza el teorema de Steward (fórmula de la longitud de la mediana) y la potencia de $B$ respecto de la circunferencia inscrita.

## OME 40. Problema 6. Sugerencia

Primer caso: 2004 fichas. No se puede llegar a la configuración pedida. Nótese que cada movimiento posible cambia en un número impar la cantidad de fichas negras, por lo que el número total de movimientos debe ser impar. Ahora búsquese un razonamiento que demuestre lo contrario, esto es, que el número de movimientos debe ser par.

Segundo caso: 2003 fichas. Sí se puede.

## OME 1. Problema 1. Solución

El discriminante de la ecuación es $a^2 - 4$, que tiene que ser estrictamente menor que cero; por lo tanto el intervalo pedido para $a$ es

$$-2 < a < 2.$$

En esas condiciones, las raíces de la ecuación son

$$-\frac{a}{2} \pm \frac{i\sqrt{4-a^2}}{2},$$

así que las ecuaciones paramétricas del lugar geométrico buscado, tomando como parámetro $a$, son

$$x = -\frac{a}{2}$$
$$y = \pm\frac{\sqrt{4-a^2}}{2}.$$

Eliminando el parámetro resulta

$$x^2 + y^2 = 1.$$

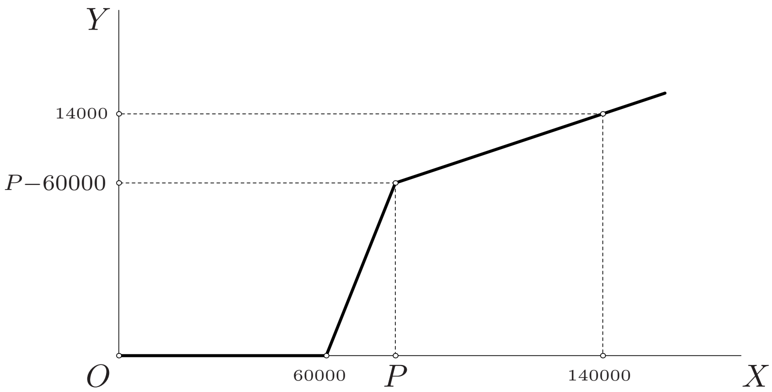
Cuando $-2 < a < 2$ resulta $-1 < x < 1$, así que el lugar geométrico es la circunferencia unidad, de ecuación compleja $|z| = 1$, de la que se han eliminado los puntos $(1,0)$ y $(0,-1)$.

**OME 1. Problema 2. Solución**

En los tres intervalos la derivada es constante, luego la función es lineal y podemos expresarla

$$f(x) = \begin{cases} 0 & 0 \leq x < 60000 \\ x - 60000 & 60000 \leq x < P \\ P - 60000 + 0.14\,(x - P) & x \geq P. \end{cases}$$

Imponiendo la condición $f(140000) = 14000$, resulta
$14000 = P - 60000 + 0.14\,(140000 - P) \implies P = 63255.81.$



# OME 1. Problema 3. Solución

Claramente $n \geq 3$. Calculemos en primer lugar el número de diagonales $d_n$ de un polígono de $n$ lados. Una diagonal es un segmento que une dos vértices de un polígono, que no es un lado. Por tanto, como cada segmento diagonal o lado queda determinado por sus puntos extremos, el número total de segmentos determinados por $n$ puntos (vértices), es el número de posibles pares de puntos (sin importar el orden) que se pueden formar con estos $n$ puntos, es decir $\binom{n}{2}$
Entonces

$$d_n = \binom{n}{2} - n = \frac{n(n-3)}{2}.$$

a) Para calcular el número total de puntos donde se cortan las rectas diagonales (rectas determinadas por los extremos de cada segmento diagonal), observamos que el número máximo de intersecciones de $k$ rectas en el plano es $\binom{k}{2}$, ($k$ entero positivo). Así las $d_n$ rectas diagonales determinarían $\binom{d_n}{2}$ puntos, si no fuera por la restricción de que por cada vértice del polígono pasan $n-3$ rectas diagonales; es decir que concurren en cada vértice $\binom{n-3}{2}$ puntos intersección de estas rectas diagonales y en total en los $n$ vértices $n\binom{n-3}{2}$ puntos intersección. Por tanto el número total de puntos donde se cortan las rectas diagonales es

$$P = \binom{d_n}{2} - n\binom{n-3}{2} = \frac{n(n-3)(n^2-7n+14)}{8}.$$

b) El número $P_I$ de puntos interiores al polígono donde se cortan las rectas diagonales o segmentos diagonales simplemente, se obtiene con facilidad observando que cada punto intersección en el interior del polígono queda determinado por los extremos de los dos segmentos diagonales que son cuatro vértices del polígono dado. Recíprocamente, cada elección de 4 vértices entre los $n$ vértices del polígono (ahora $n \geq 4$) determina un único punto interior de intersección de dos diagonales. Por tanto

$$P_I = \binom{n}{4}.$$

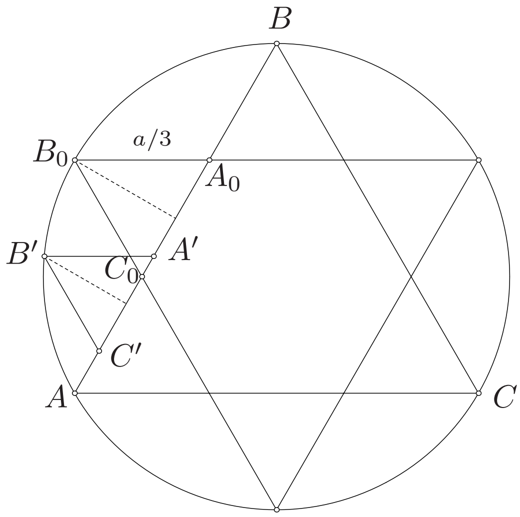
Para un triángulo obviamente $d_3 = 0$ y $P_I = 0$.
Llamando $P_E$ al número de puntos exteriores al polígono dado donde se cortan las diagonales resulta que

$$P_E = P - P_I = \binom{\frac{n(n-3)}{2}}{2} - n\binom{n-3}{2} - \binom{n}{4} = \frac{n(n-3)(n^2-9n+20)}{12}, \quad \text{para} \quad n \geq 4.$$

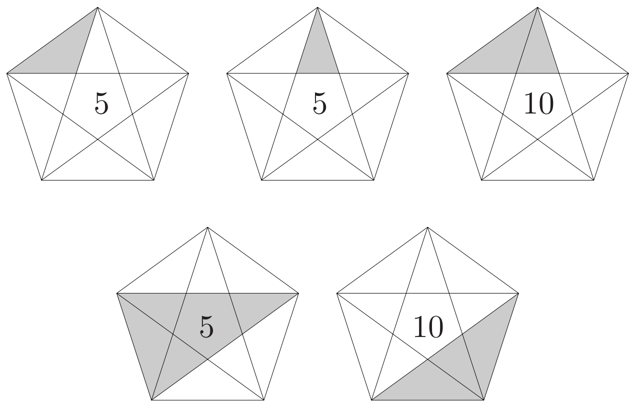
Para un triángulo, $P_E = 0$.

**OME 1. Problema 4. Solución**

Denotemos con $B'C'$ a uno cualquiera de esos segmentos, y completemos, con un punto $A'$ sobre la cuerda $AB$, el triángulo $A'C'B'$ (equilátero) de lados paralelos a los del triángulo $ABC$. La longitud $B'C'$ será máxima cuando la altura del $A'C'B'$ sea máxima, lo que corresponde evidentemente al caso en que el punto $B'$ es justamente $B_0$, el punto medio del arco $AB$. La longitud máxima será entonces (véase la figura) $B_0A_0 = \frac{a}{3}$.



**OME 1. Problema 5. Solución**




En cada figura se ha dibujado en color gris un representante de cada clase de triángulos y en el centro el número de los que hay en esa clase.

## OME 1. Problema 6. Solución

*Primera solución*

Tomemos en primer lugar la variable independiente auxiliar $\xi = x - 1$. Se trata de representar la función

$$y(\xi) = \Big| \big||\xi| - 2\big| - 3 \Big|$$

en el intervalo $-9 \leq \xi \leq 7$.

Pero la función $y(\xi)$ es par, así que basta trazar su gráfica en el intervalo $[0, 9]$, para tener, por una simetría hacia la izquierda respecto del eje $\xi = 0$, y una truncación a la derecha que omita la parte correspondiente al intervalo $[7, 9]$, la gráfica completa en el intervalo $[-9, 7]$.

Nos planteamos, pues, representar

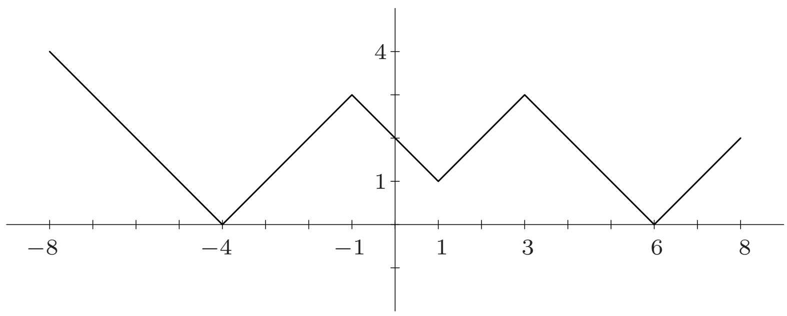
$$y(\xi) = \big||\xi - 2| - 3\big|$$

en el intervalo $0 \leq \xi \leq 9$.

Consideremos que

$$y(\xi) = \begin{cases} |\xi - 5| & \text{si } \xi \geq 2 \\ \\ |-\xi - 1| = \xi + 1 & \text{si } 0 \leq \xi \leq 2. \end{cases} \quad = \begin{cases} \xi - 5 & \text{si } \xi \geq 5, \\ 5 - \xi & \text{si } 2 \leq \xi \leq 5, \end{cases}$$

Con lo que la gráfica de la función $y(x) = y(\xi + 1)$, compuesta de segmentos rectilíneos, queda así:

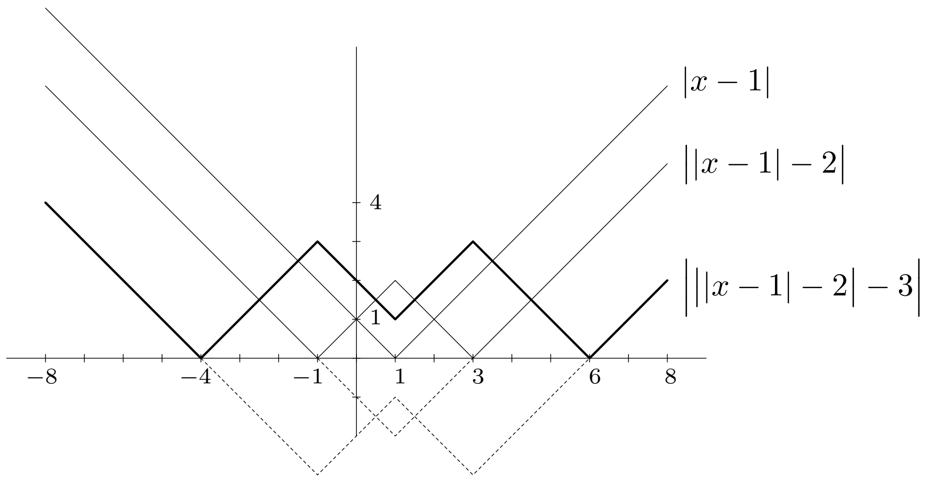



*Segunda solución*

Basta partir de la conocida gráfica de y $= |x - 1|$ y seguir las siguientes transformaciones:

- Traslación de vector $(0, -2)$ y simetría respecto de $OX$ de la parte de la gráfica situada bajo el eje $X$ (de puntos en la figura), así obtenemos la gráfica de $y = ||x - 1| - 2|$.

- Traslación de vector $(0, -3)$ y simetría respecto de $OX$ de la parte de la gráfica situada bajo el eje $X$ (de puntos en la figura), así obtenemos la gráfica de $y = |||x-1|-2|-3|$.



## OME 1. Problema 7. Solución

La operación efectuada sobre $n$ fichas es una permutación del conjunto

$$N = \{1, 2, 3, \dots, n-2, n-1, n\},$$

es decir una función biyectiva definida así:

$$\begin{aligned} f(k) &= k+2 \quad \text{si} \quad k \le n-3 \\ f(n-2) &= 1 \\ f(n-1) &= n \\ f(n) &= 2. \end{aligned}$$

Distinguiremos dos casos.

- $n$ es par, y entonces podemos escribir $f$ con la notación habitual de ciclos como

$$f : (1, 3, 5, \dots, n-1, n, 2, 4, 6, \dots, n-2)$$

donde cada elemento tiene por imagen el de su derecha y el último el primero.
Es un ciclo de longitud $n$ y por tanto de orden $n$, es decir la aplicación sucesiva $n$ veces de $f$ es la identidad y por tanto en el caso de 1000 fichas después de 1000 ejecuciones del proceso descrito el fichero queda como estaba.

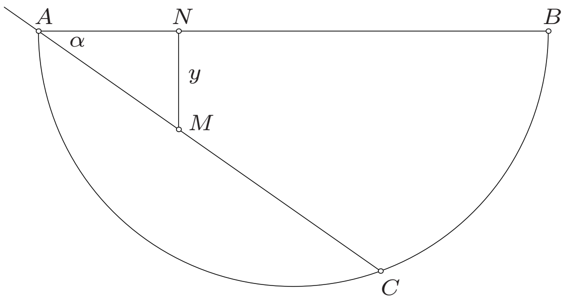
- $n$ es impar, entonces $f$ es producto de dos ciclos:

$$f : (1, 3, 5, \dots, n-2)\,(2, 4, 6, \dots, n-1, n)$$

de ordenes $\dfrac{n-1}{2}$ y $\dfrac{n+1}{2}$ respectivamente, que son primos entre sí al ser consecutivos. Por tanto el orden de $f$ en este caso es $\dfrac{n^2-1}{4} \neq n$ para cualquier natural $n$.

## OME 1. Problema 8. Solución

Sea $C$ el extremo del segmento que recorre la semicircunferencia dada, $M$ el punto medio del mismo y $\alpha$ el ángulo que forma $AC$ con la horizontal $AB$, $(0 < \alpha < \frac{\pi}{2})$.
Sea $N$ la proyección ortogonal del punto medio $M$ sobre el segmento $AB$. Ponemos $y = MN$. Se desea hallar el valor de $\cos\alpha$ para el que $M$ ocupe el punto más bajo, es decir para el que la distancia $y$ sea máxima.




En el triángulo $MNA$, rectángulo en $N$, es $y = AM \operatorname{sen}\alpha$ y en el triángulo rectángulo $CBA$, es $AC = a\cos\alpha$. Pero $AC = AM + MC = AM + \frac{a}{2}$, porque $M$ es el punto medio del segmento uno de cuyos extremos es $C$.
Entonces $AM = AC - MC = a\cos\alpha - \dfrac{a}{2}$ y

$$y = \left(a\cos\alpha - \frac{a}{2}\right)\operatorname{sen}\alpha = \frac{a}{2}(2\cos\alpha - 1)\operatorname{sen}\alpha = \frac{a}{2}(\operatorname{sen}2\alpha - \operatorname{sen}\alpha).$$

Esta función es continua y derivable en todos los números reales $\alpha$.
Derivando esta función respecto de $\alpha$, obtenemos $y' = \dfrac{a}{2}(2\cos 2\alpha - \cos\alpha)$ e igualando a 0 la derivada $y'$, llegamos a la ecuación $4\cos^2\alpha - \cos\alpha - 2 = 0$. De aquí encontramos dos posibles soluciones $\cos\alpha_1 = \frac{1+\sqrt{33}}{8}$ y $\cos\alpha_2 = \frac{1-\sqrt{33}}{8}$, porque $\left|\frac{1+\sqrt{33}}{8}\right| < 1$ y $\left|\frac{1-\sqrt{33}}{8}\right| < 1$.
La derivada segunda de $y$ es

$$y'' = \frac{a}{2}(-4\operatorname{sen}2\alpha + \operatorname{sen}\alpha) = \frac{a}{2}\operatorname{sen}\alpha\,(1 - 8\cos\alpha)$$

y entonces $y''(\alpha_1) = -\frac{a}{2}\sqrt{33}\operatorname{sen}\alpha_1 < 0$, pues

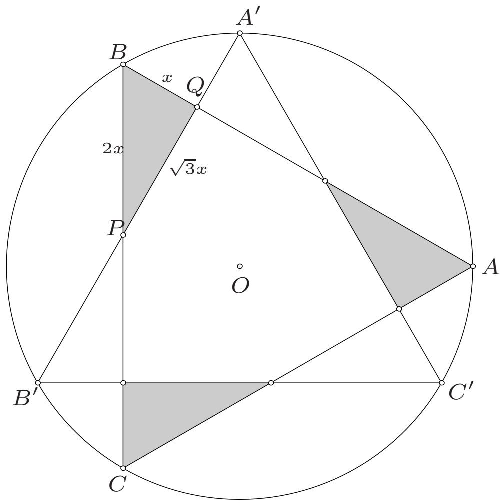
$$\operatorname{sen}\alpha_1 = \pm\sqrt{1 - \frac{(1+\sqrt{33})^2}{64}} = \pm\sqrt{\frac{15-\sqrt{33}}{32}}$$

y elegimos la solución positiva para que $\alpha_1$ esté en el primer cuadrante. Así $\operatorname{sen}\alpha_1 > 0$.
Entonces $y$ alcanza un máximo en $\alpha = \alpha_1$.
Rechazamos la segunda solución $\alpha_2$ que no está en el primer cuadrante porque $\cos\alpha_2$ es negativo.
Así el valor máximo de $y$ es:

$$
\begin{aligned}
y(\alpha_1) = \frac{a}{2}\,\text{sen}\ \alpha_1\,(2\cos\,\alpha_1 - 1) = \frac{a}{2}\sqrt{\frac{15-\sqrt{33}}{32}}\left(2\frac{1+\sqrt{33}}{8} - 1\right) = \\
= \quad \frac{a}{32}(\sqrt{33}-3)\sqrt{\frac{15-\sqrt{33}}{2}}.
\end{aligned}
$$

La respuesta es $\cos\,\alpha_1 = \dfrac{1+\sqrt{33}}{8}$.

# OME 2. Problema 1. Solución




El área pedida es la diferencia entre el área del triángulo dado $ABC$ y los tres triángulos grises de la figura.
Tenemos

$$[ABC] = 3\,\frac{1}{2}\,16\,\frac{\sqrt{3}}{2} = 12\,\sqrt{3}, \quad BC = 4\sqrt{3}.$$

Para calcular el área de uno de los triángulos grises ($BPQ$ de la figura), basta tener en cuenta que sus ángulos valen 90°, 60° y 30° y si ponemos $x = BQ$, entonces $PQ = \sqrt{3}\,x$ y $BP = 2x$.

$$[BPQ] = \frac{\sqrt{3}}{2}x^2.$$

El área pedida $S$ es:

$$S = 12\sqrt{3} - \frac{3\sqrt{3}}{2}x^2.$$

Sólo nos queda calcular $x$; para ello basta tener en cuenta que:

$$x + 2x + \sqrt{3}x = 4\sqrt{3} \iff x = 2\left(\sqrt{3} - 1\right).$$

Sustituyendo en la expresión anterior y operando, resulta:

$$S = 12\sqrt{3} - \frac{3\sqrt{3}}{2}x^2 = 12\sqrt{3} - \frac{3\sqrt{3}}{2}8\left(2 - \sqrt{3}\right) = 12\left(3 - \sqrt{3}\right).$$

## OME 2. Problema 2. Solución

a) Las cifras pueden repetirse. Sea $n > 1$ la cifra central. La de la izquierda puede ser una cifra cualquiera entre 1 y $n-1$. La de la derecha puede ser una cualquiera entre 0 y $n-1$. En total hay

$$\sum_{2}^{9} n(n-1) = \sum_{1}^{8} n(n+1) = \sum_{1}^{8} n^2 + \sum_{1}^{8} n = \frac{8 \cdot 9 \cdot 17}{6} + \frac{9 \cdot 8}{2} = 204 + 36 = 240.$$

b) Las cifras no pueden repetirse. Sea $n > 1$ la cifra central. La de la izquierda puede ser una cifra cualquiera entre 1 y $n-1$. La de la derecha puede ser una cualquiera entre 0 y $n-1$, excepto la utilizada a la izquierda. En total hay

$$\sum_{2}^{9} (n-1)^2 = \sum_{1}^{8} n^2 = \frac{8 \cdot 9 \cdot 17}{6} = 204.$$

## OME 2. Problema 3. Solución

*Primera solución*

Adoptemos las siguientes notaciones: $R_0 = 29/2$, radio exterior del surco; $R_1 = 11.5/2$, radio interior del mismo; $\Delta R = R_1 - R_0 = 17.5/2$; $T = 1470$ s, tiempo de audición; $\omega = 33\frac{1}{3}$ rpm $= 10\pi/9$ rad/s, velocidad angular del disco.
En un instante $t$ de la reproducción del disco ($0 \leq t \leq T$), la aguja está a una distancia $R(t)$ del centro que viene dada evidentemente (supuesta la regularidad de la espiral que forma el surco) por la fórmula

$$R(t) = R_0 - \frac{\Delta R}{T}\,t = \frac{29}{2} - \frac{t}{168}\,.$$

Y en ese mismo instante, la velocidad lineal $V(t)$ a la que el surco está pasando por debajo de la aguja es

$$V(t) = \omega R(t) = \frac{145\pi}{9} - \frac{5\pi}{756}\,t\,.$$

El elemento diferencial de "longitud de surco" en el instante $t$ es $ds = V(t)\,dt$. Luego la longitud del surco, mediante una sencilla integración, es

$$S = \int_0^T ds = \int_0^{1470} \left(\frac{145\pi}{9} - \frac{5\pi}{756}\,t\right) dt = \left[\frac{145\pi}{9}\,t - \frac{5\pi}{756}\,\frac{t^2}{2}\right]_0^{1470} = 16\,537.5\,\pi.$$

*Segunda solución*

El surco de un disco forma una espiral que suponiendo constante la anchura del surco y la separación entre surcos es una espiral de Arquímedes de ecuación polar:

$$\rho = a\varphi$$

Con los datos que nos proporciona podemos hallar $a$ y la longitud de la espiral.
Llamando $R$ y $r$ a los radios exterior e interior de la corona que forma la parte grabada, tenemos:

$$\left.\begin{array}{l} R = a\varphi_2 \\ r = a\varphi_1 \end{array}\right\} \Rightarrow (R - r) = a\,(\varphi_2 - \varphi_1) \Rightarrow a = \frac{R - r}{\varphi_2 - \varphi_1}$$

siendo $\varphi_2 - \varphi_1$ el ángulo descrito por la espiral en la zona grabada que podemos calcular sabiendo que en total se han dado $33\frac{1}{3} \cdot 24.5 = 816.66$ vueltas que corresponden a un ángulo de $2 \cdot 816.66\pi = 5131.268$ radianes. Entonces

$$a = \frac{R - r}{\varphi_2 - \varphi_1} = \frac{14.5 - 5.75}{5131.27} = 0.0017$$

la longitud $s$ de arco ente los valores inicial $\varphi_1 = \frac{5.75}{a} = 3371.976$ y final $\varphi_2 = \frac{14.5}{a} = 8503.244$ es:

$$s = a\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sqrt{1+\varphi^2}d\varphi = \frac{a}{2}\left[\varphi\sqrt{1+\varphi^2} + \ln\left(\varphi + \sqrt{1+\varphi^2}\right)\right]_{\varphi_1}^{\varphi_2} = 519.540893\,\mathrm{m}.$$

*Tercera solución*

Tanto por el tipo de ecuación en polares como por la artillería usada (la integral para la longitud del arco no es precisamente inmediata) no parece que esta sea la solución pensada por el autor del problema.
Podemos hacerlo con una aproximación "razonable" consistente en considerar círculos concéntricos cuyos radios están en progresión aritmética:

$$\begin{aligned}
\text{Longitud primera vuelta } &= \pi \cdot 29 = 36.1283155 \\
\text{Longitud última vuelta } &= \pi \cdot 11.5 = 91.106187 \\
\text{Número de vueltas } &= 33\frac{1}{3} \cdot 24.5 = 816.66 \\
\text{Longitud total } &= \frac{(36.1283155 + 91.106187)816.66}{2} = 519.5408851\,\mathrm{m}.
\end{aligned}$$

La aproximación es más que razonable ya que las soluciones difieren en menos de una centésima de milímetro.

## OME 2. Problema 4. Solución

1. Suponemos primero que $0 \leq x \leq 2\pi$.
Consideramos una circunferencia de radio unidad centrada en el origen de coordenadas $O$. Sea $P$ un punto de la misma y $x$ el ángulo medido en sentido antihorario que forma el semieje positivo de abscisas con $OP$. Entonces $P$ tiene de coordenadas $(\cos x, \operatorname{sen} x)$. Sea ahora $Q$ la proyección del punto $P$ sobre el eje de abscisas. Entonces la desigualdad primera $\cos x + \operatorname{sen} x > 1$ puede interpretarse geométricamente en el triángulo rectángulo $OPQ$ como $PQ + OQ > OP$, es decir que la suma de las longitudes de los catetos es mayor que la longitud de la hipotenusa. Esta relación se cumple obviamente para los ángulos $x$ del primer cuadrante: $0 < x < \frac{\pi}{2}$. En otro cuadrante cualquiera o bien el $\operatorname{sen} x$ o bien el $\cos x$ o los dos son negativos y como además $\operatorname{sen} x < 1$ y $\cos x < 1$ no se puede tener esta desigualdad primera.

La segunda desigualdad $\cos x + |\operatorname{sen} x| > 1$, requiere al igual que la primera que sus dos sumandos sean estrictamente positivos y esta condición sólo se cumple si $\cos x > 0$ y $\operatorname{sen} x \neq 0$ es decir si $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$ ó si $\dfrac{3\pi}{2} < x < 2\pi$.

2. Supongamos que el ángulo $x$ es cualquier número real.
Entonces la primera desigualdad se cumple para $2\pi n < x < \frac{\pi}{2} + 2\pi n$ siendo $n$ un entero cualquiera. Y la segunda desigualdad para $-\dfrac{\pi}{2} + 2\pi m < x < \dfrac{\pi}{2} + 2\pi m$ siendo $m$ cualquier entero positivo, negativo o nulo.

## OME 2. Problema 5. Solución

Sucede que operando en la hipótesis tenemos

$$\frac{3x-b}{3x-5b}=\frac{3a-4b}{3a-8b} \iff b\,(x-a+b)=0$$

y por tanto para que se cumpla la hipótesis se debe dar necesariamente uno de estos casos:

a) $b=0$. Entonces la hipótesis se reduce a $\dfrac{3x}{3x}=\dfrac{3a}{3a}=1$ y no hay discrepancia con la tesis.

b) $x-a+b=0$, en cuyo caso no podemos aplicar la propiedad pues quedaría el denominador (y el numerador) cero.

## OME 2. Problema 6. Solución

El círculo inscrito en el triángulo es el círculo menor de la esfera sobre el que reposa el triángulo; sea $I$ su centro, que pertenece al plano del triángulo, a cuyos vértices llamamos $A$, $B$, $C$. Sea $O$ el centro de la esfera y $P$ el punto de tangencia del círculo inscrito con el lado $AB$ (por ejemplo) del triángulo. $P$ es un punto de la superficie de la esfera.
El triángulo $IPA$ es rectángulo en $P$; llamando $\rho$ al radio del círculo inscrito, se tiene

$$\frac{1}{\sqrt{3}} = \tan 30^\circ = \frac{\rho}{\frac{\ell}{2}} = \frac{2\rho}{\ell},$$

así que $\rho = \dfrac{\ell}{2\sqrt{3}}$.
Como $\rho < r$, debe ser $\dfrac{\ell}{2\sqrt{3}} < r$, es decir $\ell < 2\sqrt{3}r$ para que se cumplan las condiciones del enunciado y la esfera no pase a través del triángulo.
El teorema de Pitágoras en $IPA$ permite escribir

$$IA^2 = IP^2 + PA^2 = \left(\frac{\ell}{2}\right)^2 + \left(\frac{\ell}{2\sqrt{3}}\right)^2 = \frac{\ell^2}{3};$$

en el triángulo rectángulo $IPO$ nuevamente el teorema de Pitágoras da

$$IO^2 = r^2 - \rho^2 = r^2 - \frac{\ell^2}{12};$$

y finalmente, de nuevo, el teorema de Pitágoras en $IAO$ da la distancia del centro de la esfera a los vértices del triángulo:

$$OA^2 = IO^2 + IA^2 = r^2 - \frac{\ell^2}{12} + \frac{\ell^2}{3} = r^2 + \frac{\ell^2}{4},$$

luego

$$OA = \sqrt{r^2 + \frac{\ell^2}{4}}.$$

## OME 2. Problema 7. Solución

El volumen de un cono de radio de la base $R$ y altura $H$ es $V = \frac{1}{3}\pi R^2 H$. Dado que $H = mR$ ($m > 0$ fijo), tendremos

$$V = \frac{1}{3}\pi R^3 m\,.$$

La masa del tronco de cono del problema, en funció del radio $0 \leq x < r$ de su base menor es

$$M(x) = \left(\frac{1}{3}\pi r^3 m - \frac{1}{3}\pi x^3 m\right) d + \pi x^2 p\,.$$

Derivando, se tiene

$$M'(x) = -\pi x^2 md + 2\pi px,$$

y

$$M''(x) = -2\pi mdx + 2p\pi.$$

La derivada se anula para $x_0 = 0$ y para $x_1 = \frac{2p}{md}$. El punto $x_0$ es el extremo izquierdo del intervalo de variación de $x$, donde se va a alcanzar el valor mínimo $M(0) = 0$, y el punto $x_1$ corresponde a un máximo relativo de $M(x)$, pues $M''(x_1) = M''\left(\frac{2p}{md}\right) = -2p\pi < 0$. Cuando este segundo punto crítico sea interior al intervalo, es decir, si

$$\frac{2p}{md} < r,$$

en él se alcanzará el valor máximo de la función $M(x)$ cuando $x \in [0, r)$, siendo en este caso la altura del tronco de cono igual a

$$h = m(r - x_1) = m\left(r - \frac{2p}{md}\right) = mr - 2\frac{p}{d}\,.$$

En caso contrario, es decir,

$$\text{si} \quad \frac{2p}{md} \geq r,$$

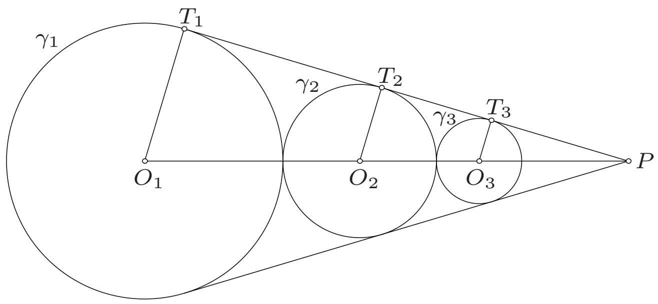
el valor máximo de $M(x)$ sería el

$$\lim_{x \to r^-} M(x) = \pi p r^2,$$

que no se alcanza, pues correspondería a un tronco de cono de altura $h = m(r - r) = 0$.

## OME 2. Problema 8. Solución

Por conveniencia, llamaremos $r_1 = r$, $O_1$ a su centro, $T_1$ al punto de tangencia de una de las rectas con $\gamma_1$ y $T_2$ al de $\gamma_2$ con esta misma recta.




Los triángulos $PT_2O_2$ y $PT_1O_1$ son semejantes; la proporcionalidad existente entre sus lados nos permite calcular $r_2$, el radio de $\gamma_2$

$$\frac{a}{a - r_1 - r_2} = \frac{r_1}{r_2} \iff r_2 = r_1 \cdot \frac{a - r_1}{a + r_1}.$$

Calculando de manera similar $r_3$ resulta

$$r_3 = r_1 \cdot \left(\frac{a - r_1}{a + r_1}\right)^2,$$

y eso nos hace conjeturar que los radios de las circunferencias formarán una progresión geométrica de razón

$$\frac{a - r_1}{a + r_1} < 1,$$

conjetura que se prueba por inducción, utilizando la semejanza entre los triángulos $PO_nT_n$ y $PO_{n-1}T_{n-1}$.
Entonces la expresión general para el radio de $\gamma_n$ será

$$r_n = r_1 \cdot \left(\frac{a - r_1}{a + r_1}\right)^{n-1}.$$

Y por último, el límite de la suma de las longitudes de las circunferencias es

$$\lim_{n\to\infty} 2\pi \left(r_1 + r_2 + \cdots + r_n\right) = 2\pi \cdot \frac{r_1}{1 - \frac{a-r_1}{a+r_1}} = \pi \left(a + r_1\right).$$

## OME 3. Problema 1. Solución

Pongamos $x$, $y$, $z$ para las unidades de precios 50, 70 y 65 respectivamente. Tenemos obviamente

$$\begin{cases} 50x + 70y + 65z = 6850 \\ x + y + z = 100 \end{cases}$$

Se trata de resolver el sistema anterior en los naturales haciendo $y$ máximo.
Simplificando y eliminando $z$, resulta:

$$y = 70 + 3x$$

pero

$$x + y \leq 100 \implies 70 + 4x \leq 100 \implies x \leq 7.$$

Dado que debemos hacer $y$ máximo, debemos tomar el valor máximo posible de $x$ (ya que $y = 70 + 3x$). Por tanto

$$x = 7, \quad z = 2, \quad y = 91.$$

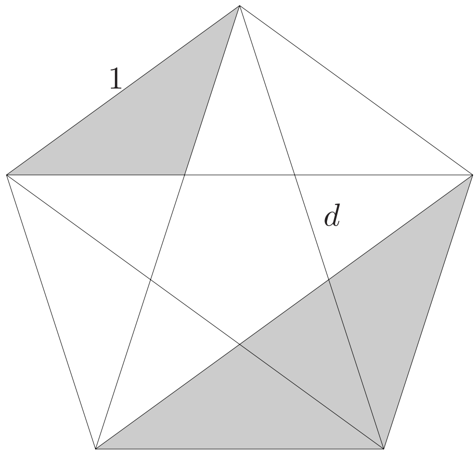
# OME 3. Problema 2. Solución

En el sistema de base 7 sólo se utilizan los números enteros del 0 al 6, y en el de base 9, del 0 al 8. Entonces los números $x$, $y$, $z$ están entre 0 y 6.
El número $xyz$ en base 7, representa el número $x\,7^2 + y\,7 + z$ en base 10. Y el número $zxy$ en el sistema de numeración de base 9, representa en base 10 el número $z\,9^2 + y\,9 + x$.
Por tanto $x\,7^2 + y\,7 + z = z\,9^2 + y\,9 + x$, que es equivalente a $8(3x - 5z) = y$, con $x, y, z$ números enteros comprendidos entre 0 y 6 inclusive. Entonces $y$ debe ser 0 y $3x = 5z$, de donde $x = z = 0$ ó $x = 5$ y $z = 3$. La primera conduce al número 000 que no es de tres cifras y la segunda al número 503 en base 7 y al número 305 en base 9. Ambos números son en base 10 el número 248, y esta es la respuesta.

**OME 3. Problema 3. Solución**

a) Podemos considerar sin pérdida de generalidad que el lado mide 1 con lo que la diagonal $d$ se calcula mediante la semejanza entre los triángulos sombreados:

$$\frac{d}{1} = \frac{1}{d-1} \implies d^2 - d - 1 = 0 \quad (\text{y} \quad d \geq 1) \implies d = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$




Este número es el llamado *número áureo* y se suele designar por $\Phi$. Cumple $\Phi^2 = \Phi + 1$. La relación $r$ de semejanza del pentágono grande al pequeño es:

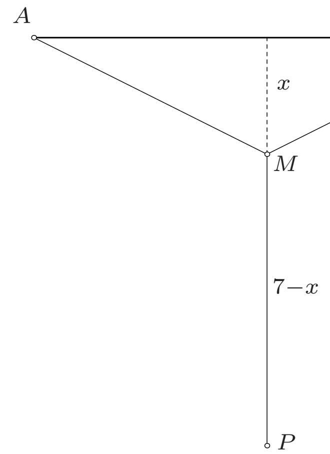
$$r = \frac{1}{a} = \frac{1}{2-\Phi} = \frac{3+\sqrt{5}}{2}.$$

b) La relación de las áreas es

$$r^2 = \frac{7-3\sqrt{5}}{2}.$$

c) Los dos pentágonos son homotéticos en una homotecia de centro el centro del pentágono y razón $-\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$

# OME 3. Problema 4. Solución




La función que expresa el costo es:

$$f(x) = p\,(7-x) + 2q\sqrt{x^2+4}.$$

Tenemos que buscar su mínimo cuando $0 \le x \le 7$.
Derivando e igualando a cero resulta:

$$f'\,(x) = -p + \frac{2qx}{\sqrt{x^2+4}} = 0 \iff x = \frac{2p}{\sqrt{4q^2-p^2}}.$$

Distinguiremos dos casos:
a) $p < \dfrac{14}{\sqrt{53}}\,q$. Como $\dfrac{14}{\sqrt{53}} < 2$, en este caso existe el punto crítico

$$x_0 = \frac{2p}{\sqrt{4q^2-p^2}}$$

que además es un mínimo ya que volviendo a derivar resulta:

$$f''(x) = \frac{8q}{(x^2+4)^{3/2}} > 0$$

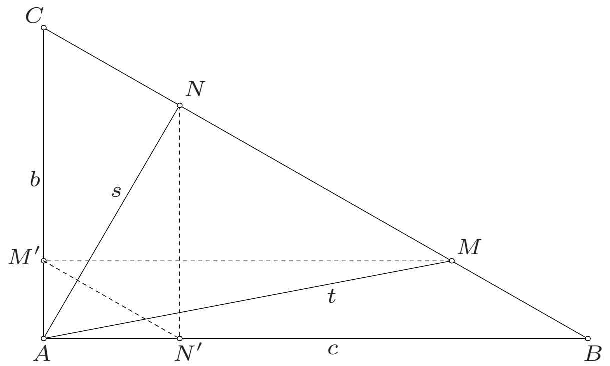
y se tiene que $0 < x_0 < 7$, como se puede comprobar de forma inmediata. En este caso las longitudes del cable y de la cadena pa el precio más económico son, respectivamente, $7 - x_0$ y $2\sqrt{x_0^2+4}$.

b) $p \ge \frac{14}{\sqrt{53}}\,q$. En este caso no hay ningún punto crítico interior al intervalo $[0,7]$. Además

$$f'(x) = -p + \frac{2qx}{\sqrt{x^2+4}} < -p + 2q\,\frac{7}{\sqrt{53}} \le 0,$$

la función es decreciente y el máximo se alcanza para $x_0 = 7$. En esta caso la longitud del cable es 0 y la de la cadena es $2\sqrt{53}$.

## OME 3. Problema 5. Solución




Denominamos $AB = c$, $AC = b$, $AM = t$, $AN = s$, $BM = k$ y $MC = a - k$.
a) Sean los ángulos $\alpha = \widehat{AMB}$, $180° - \alpha = \widehat{AMC}$. Aplicamos el teorema del coseno a los triángulos $ABM$ y $ACM$ utilizando respectivamente en cada triángulo los ángulos $\alpha$ y $180° - \alpha$, resultando

$$c^2 = k^2 + t^2 - 2kt\cos\alpha, \qquad b^2 = (a-k)^2 + t^2 - 2(a-k)t\cos(180^o - \alpha);$$

eliminando ahora $\cos\alpha$ en estas dos ecuaciones, reduciendo términos y simplificando llegamos a

$$kb^2 + (a-k)c^2 = at^2 + ak(a-k)$$

y procediendo de manera similar con los triángulos $ANC$ y $ANB$, tenemos

$$kc^2 + (a-k)b^2 = as^2 + ak(a-k).$$

Sumando estas dos ecuaciones y teniendo en cuenta que $b^2 + c^2 = a^2$ obtenemos que

$$a^3 = a(t^2 + s^2) + 2ak(a-k),$$

con lo que $AM^2 + AN^2 = t^2 + s^2 = a^2 - 2k(a-k)$.
b) La base del triángulo $AMN$ correspondiente al vértice $A$ mide $a - 2k$.
Los triángulos $ABC$ y $AMN$ tienen la misma altura correspondiente al vértice $A$. Por tanto

$$\frac{\text{Area}(AMN)}{\text{Area}(ABC)} = \frac{a-2k}{a}.$$

c) Los puntos $A$, $M'$, $N'$ están en una circunferencia de diámetro $M'N'$ porque el triángulo $M'N'A$ es rectángulo en $A$. Se observa que $BC$ es paralelo a $M'N'$ por la semejanza de los triángulos rectángulos $ABC$ y $AN'M'$. La proyección del segmento $BM$, que es paralelo a $M'N'$, sobre $AC$ es $AM'$ y la proyección de $M'N'$ sobre $AC$ es también $AM'$. Por tanto $M'N' = k$. Entonces el área del círculo de diámetro $M'N' = k$ es $\frac{\pi}{4}k^2$.

## OME 3. Problema 6. Solución

Hay que calcular de cuántas maneras se han podido producir los 5 nacimientos, en las condiciones del problema, y cuál es la probabilidad de cada una.
La probabilidad asociada al nacimiento de los 5 hijos es

$$\left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{1}{32}.$$

En las condiciones del problema, el suceso 4V1M se puede producir de $P^5_{4,1} = 5$ maneras diferentes; el suceso 3V2M de $P^5_{2,3} = 10$ maneras distintas, y el suceso 2V3M de $P^5_{3,2} = 10$ maneras distintas. En total, 25; por lo tanto la probabilidad pedida es

$$p = \frac{25}{32}.$$

## OME 3. Problema 7. Solución

Llamando $a$ al término central y $r$ a la razón, tenemos el sistema:

$$\begin{cases} a\left(\dfrac{1}{r^3}+\dfrac{1}{r^2}+\dfrac{1}{r}\right)=7 \\ a\left(r+r^2+r^3\right)=112 \end{cases}$$

cuya solución es $r=2$ ; $a=8$ y la progresión es: 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64.

## OME 3. Problema 8. Solución

Tenemos:

$$y'(x) = 3ax^2 + 2bx + c; \quad y''(x) = 6ax + 2b$$

y como la tangente pasa por el punto $P(3,1)$ y la pendiente de la recta vale $\frac{1}{4}$, las condiciones del enunciado se traducen en:

$$y(3) = 1, \quad y'(3) = \frac{1}{4}, \quad y''(3) = 0,$$

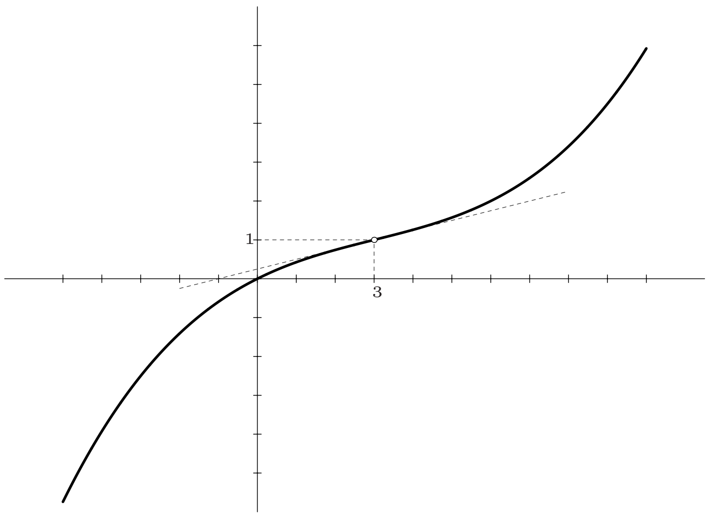
que corresponde a

$$\begin{cases} 27a + 9b + 3c = 1 \\ 27a + 6b + c = \frac{1}{4} \\ 18a + 2b = 0. \end{cases}$$

Este sistema nos lleva a la solución:

$$y = \frac{x^3}{108} - \frac{x^2}{12} + \frac{x}{2}$$

cuya gráfica es



## OME 4. Problema 1. Solución

Primeramente indicamos que el enunciado hace notar el crecimiento de la función $f$ en los extremos del intervalo $[-8, 8]$, de tal modo que $f$ es monótona creciente en $-8$ si existe un semiintervalo $[-8, -8+\delta)$, con $\delta > 0$, donde $f$ es monótona creciente y análogamente $f$ es monótona creciente en 8 si existe un semiintervalo $(8-\delta', 8]$, con $\delta' > 0$, donde $f$ es monótona creciente.

Sea $g(x) = 2x - x^2$. Esta función es creciente estrictamente en $(-\infty, 1)$. Se puede llegar a este resultado observando que la gráfica de $g$ es una parábola de vértice $(1, 1)$ que pasa por los puntos $(0, 0)$ y $(2, 0)$. O también calculando $g'(x) = 2(1-x)$, que es positiva para $x < 1$. Y entonces $g$ es monótona creciente en $(-\infty, 1]$, considerando que $g$ sea creciente en 1.

Entonces la función $y = f(2x-x^2)$ es la composición de $f$ y $g$, es decir, $y(x) = \big(f \circ g\big)(x) = f\big(g(x)\big)$. Sabemos que la composición de dos funciones monótonas crecientes es monótona creciente.

Como $f$ es monótona creciente en el intervalo cerrado $[-8, 8]$ y $g$ en $(-\infty, 1]$, entonces se puede asegurar que la función $y = f(2x - x^2)$ será monótona creciente en el conjunto $D \cap (-\infty, 1]$, siendo

$$D = \{\, x \in \mathbb{R} \mid -8 \leq g(x) \leq 8 \,\} = \big\{\, x \in \mathbb{R} \mid -8 \leq 2x - x^2 \leq 8 \,\big\}\,.$$

Entonces $D$ queda determinado por las dos desigualdades siguientes:

$$x^2 - 2x + 8 \geq 0 \text{ (I)} \quad \text{y} \quad x^2 - 2x - 8 \leq 0. \text{ (II)}$$

(I) es equivalente a $(x-1)^2 + 7 \geq 0$, que se cumple para todo $x \in \mathbb{R}$.

(II) es equivalente a $(x+2)(x-4) \leq 0$, que se cumpe en el intervalo cerrado $[-2, 4]$.

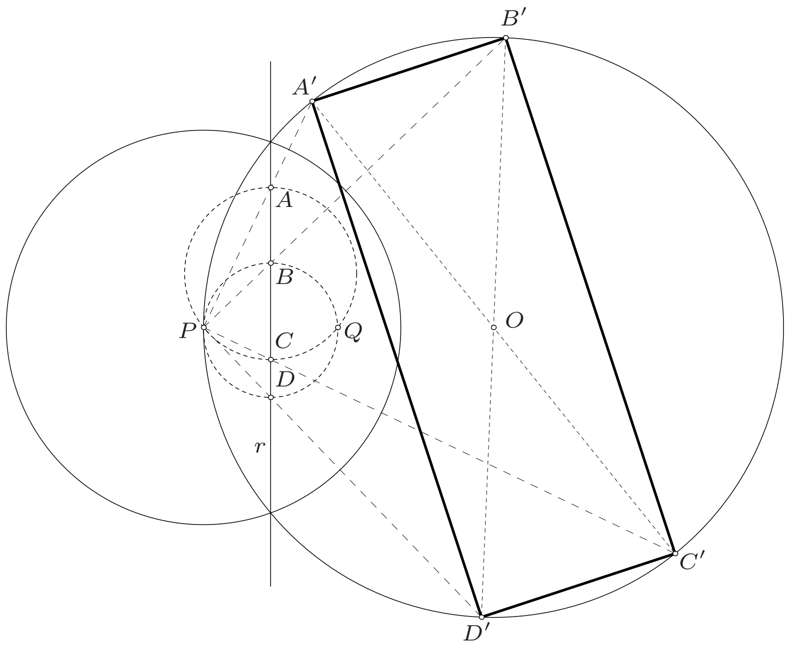
Por tanto $D$ es el conjunto de números reales que cumple (I), es decir que es cualquier número real y que cumple (II), es decir que pertenece al intervalo cerrado $[-2, 4]$.

Así $D = \mathbb{R} \cap [-2, 4] = [-2, 4] = \{x \in \mathbb{R} | -2 \leq x \leq 4\}$.

Y el conjunto $D \cap (-\infty, 1]$ es el intervalo $[-2, 1] = \{\, x \in \mathbb{R} \,|\, -2 \leq x \leq 1\}$.

**OME 4. Problema 2. Solución**

Supongamos el problema resuelto.




Evidentemente el polo buscado $P$ no puede estar en la recta $r$ que contiene a los puntos dados. Sea $O$ el centro de la circunferencia circunscrita al rectángulo $A'B'C'D'$ que es la inversa de $r$.

Las rectas $A'C'$ y $B'D'$ pasan por $O$, luego sus figuras inversas pasarán por el inverso de $O$. Sus figuras inversas son dos circunferencias que pasan por el polo $P$ de inversión. Además, siendo ambas rectas ortogonales a la circunferencia de centro $O$, sus inversas deben ser ortogonales a $r$, es decir su centro ha de estar en $r$.

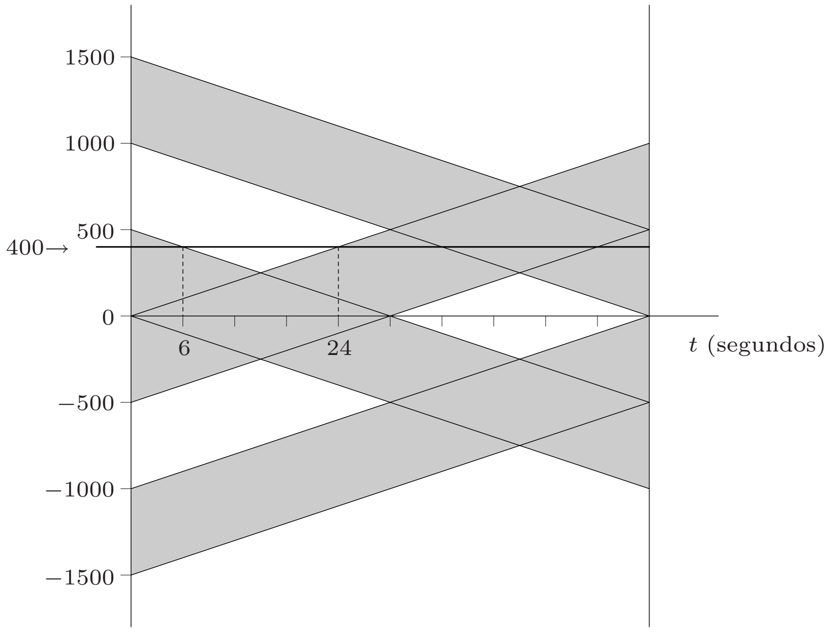
La construcción es clara: Se trazan las circunferencias de diámetro $AC$ y $BD$, que se cortarán en dos puntos $P$ y $Q$. Uno de ellos es el polo buscado y el otro el inverso de $O$.

Hay dos posibles polos de inversión $P$ y $Q$ (en la figura se ha representado la de polo $P$).

La potencia puede ser cualquiera.

## OME 4. Problema 3. Solución

Por las franjas grises de la figura marchan, a lo largo de rectas paralelas a las que definen las franjas de pendiente $\pm 1000$ m/min, los coches que van a 60 Km/h y pasan el semáforo principal en verde, y la recta correspondiente a cada uno define su movimiento durante los 60 segundos que dura un período de ese semáforo:




Si nos fijamos en la recta horizontal a la altura de 400 m (lugar del semáforo secundario), veremos que el único intervalo en el que no pasa ninguno de esos coches ocurre entre los segundos 6 y 24 desde que se ha puesto verde el semáforo principal. De modo que el semáforo secundario puede permanecer en rojo 18 segundos como máximo para no obligar a detenerse a ninguno de los coches que pasan en verde el semáforo principal.

# OME 4. Problema 4. Solución

Debemos suponer que la botella no es opaca.
Primeramente se pone de pie la botella sobre una mesa apoyada sobre su base.
Con el doble decímetro medimos la distancia desde la base de la botella hasta el nivel indicado por el vino. Sea esta distancia $a$. Giramos 180° la botella hasta que ocupe de nuevo la posición vertical y observamos si ahora el nivel indicado por el vino llega hasta la parte cilíndrica. En este caso medimos la distancia desde la base de la botella, que esta arriba hasta el nivel de vino. Sea esta distancia $b$.
A continuación determinamos el radio del círculo del fondo de la botella marcando un punto $A$ sobre la circunferencia y colocando la botella horizontalmente de modo que el punto marcado esté sobre la mesa. En esta señalamos un punto $P$. Hacemos rodar la botella sobre la mesa horizontalmente hasta que de un giro completo de 360° y el punto $A$ ocupe su posición más baja. Señalamos de nuevo ese punto $B$ sobre la mesa y la distancia $AB$ es la longitud de la circunferencia de la base de la botella.
Entonces si el volumen de la botella es $V$ se tiene

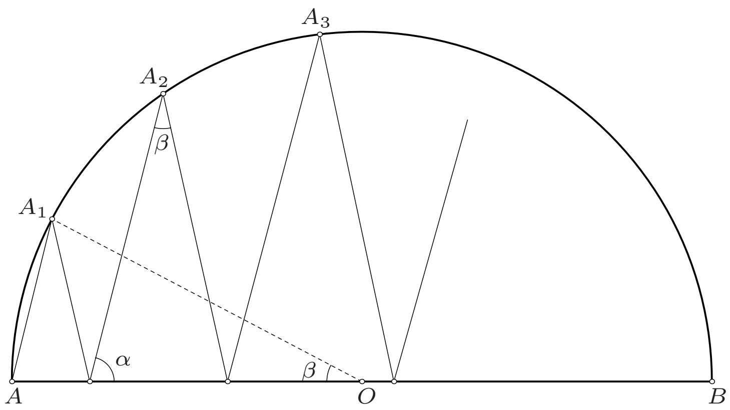
$$\frac{V}{2} = \pi R^2 \left( \frac{a+b}{2} \right),$$

siendo $R = \dfrac{AB}{2\pi}$; de donde se deduce

$$V = \frac{AB^2}{2\pi} \left( \frac{a+b}{2} \right).$$

El problema no podría resolverse si el volumen de vino no llena al menos toda la parte no cilíndrica de la botella cuando a ésta se le da la vuelta.
Por otra parte el método indicado no tiene en cuenta el espesor del cristal o del material de que está hecha la botella.

**OME 4. Problema 5. Solución**




a) Los triángulos con vértices $A_k$ y lado opuesto sobre el diámetro son isósceles y semejantes todos ellos al $AA_1O$ al tener todos los mismo ángulos iguales $\alpha$.
En consecuencia, todos los arcos $A_kA_{k+1}$ son iguales y su valor común es $\beta = 180° - 2\alpha$.
La quebrada pasará por $B$ después de $n$ subidas y bajadas, cuando

$$\beta_n = \frac{180°}{n} \iff \alpha_n = \frac{180° - \beta_n}{2} = 90^o - \frac{90°}{n}$$

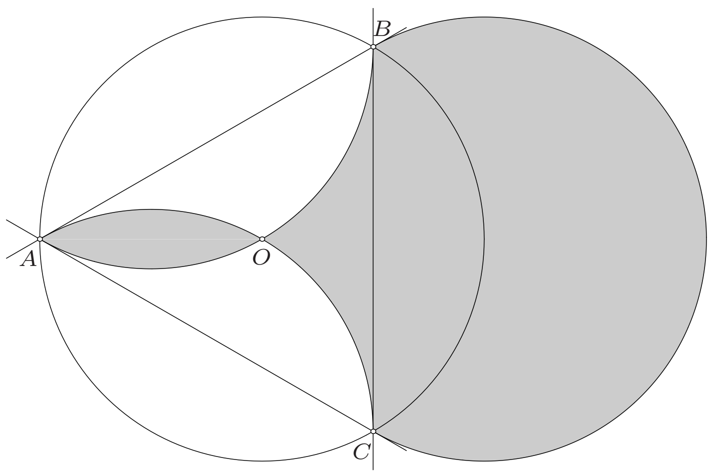
con $n = 2, 3, \ldots$.

b) Llamando $L_n$ a la longitud de la quebrada al formar todos los segmentos el mismo ángulo con el diámetro, su proyección sobre el diámetro es $d$ y cumple:

$$d = L_n \cos \alpha_n \Rightarrow L_n = \frac{d}{\cos \alpha_n} = \frac{d}{\operatorname{sen}\left(\frac{90°}{n}\right)}.$$

## OME 4. Problema 6. Solución

La circunferencia de centro $O$ y radio $R$ es la autoinversa; los puntos $A$, $B$ y $C$ son dobles. El ángulo marcado con vértice $A$ se transforma en la lúnula con vértices $A$ y $O$.
La recta $BC$ se transforma en la circunferencia que pasa por $B$ y $C$, marcada en la siguiente figura; en particular, el segmento BC se transforma en el arco $BC$. La parte comprendida entre el segmento $BC$ y el arco de circunferencia es globalmente invariante en la inversión; el resto de la región marcada en la primera figura se transforma en la zona limitada por el segmento $BC$ y los arcos $BO$ y $OC$.



E

## OME 4. Problema 7. Solución

A partir de un punto de la carretera y en un tiempo $t$, el espacio recorrido por un coche es $e = vt$ y en ese espacio se ha de ubicar el mayor número de coches.

Como cada coche ocupa un trozo de carretera $a = 2,98 + \dfrac{v^2}{100}$, el número de coches $n(v)$ que se pueden colocar es:

$$n(v) = \frac{\frac{vt}{1000}}{2,98 + \frac{v^2}{100}} = \frac{\frac{100vt}{1000}}{298 + v^2}$$

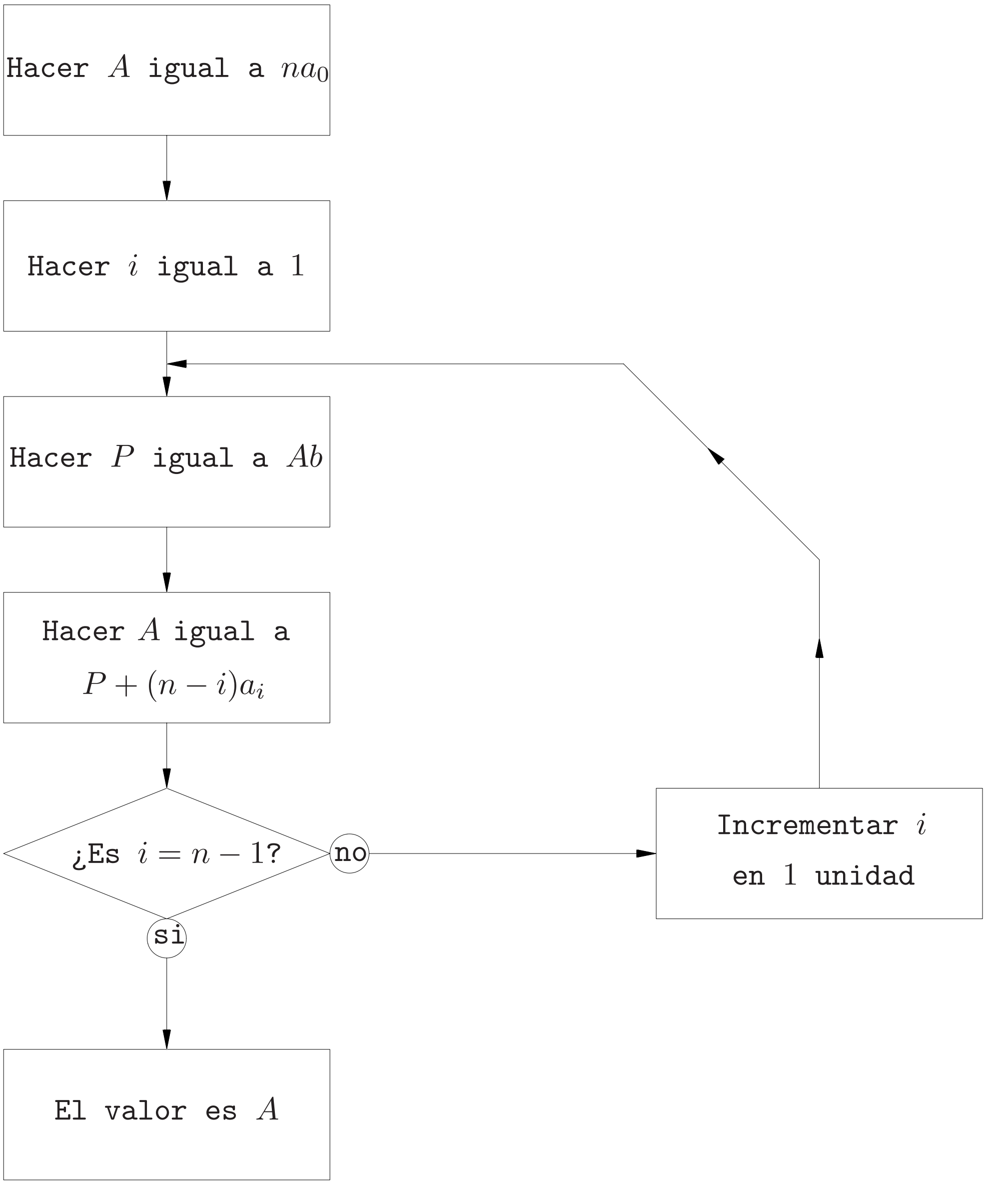
cuya derivada es:

$$n'(v) = \frac{100}{1000}\, t\, \frac{298 - v^2}{(298 + v^2)^2}.$$

Anulando la derivada y resolviendo en $v$ sale $v = 17,26$ Km/h. que es claramente un máximo ya que en ese punto la derivada pasa de positiva a negativa.

# OME 4. Problema 8. Solución

Un posible organigrama sería simplemente así:



## OME 5. Problema 1. Solución

Sea $t$ el tiempo (en horas) transcurrido desde que comenzó a helarse el estanque hasta las 0 horas. De acuerdo con el enunciado,

$$3 = k\sqrt{t}.$$

El agua aumenta de volumen al helarse; su densidad disminuye (la del agua es 1), y su peso se conserva.
Si $S$ es la superficie del cilindro, el peso del agua es

$$10S \times 1;$$

el peso del hielo será

$$P_{\text{hielo}} = V_{\text{hielo}} \times 0,9 = S \times h_{\text{hielo}} \times 0,9.$$

Igualando el peso del hielo y el del agua tenemos

$$S \times 10 = S \times h_{\text{hielo}} \times 0,9$$

y de aquí $h_{\text{hielo}} = 10/0,9 = 100/9$ al terminar de helarse el estanque.
Entonces

$$\frac{100}{9} = k\sqrt{t+4},$$

y eliminando la constante de proporcionalidad

$$\frac{100}{27} = \frac{\sqrt{t+4}}{\sqrt{t}}.$$

Resolviendo esta ecuación irracional se obtiene

$$t\left(100^2 - 27^2\right) = 27^2 \times 4$$

es decir

$$t = \frac{2916}{9271} = 0,31 \text{ horas, aproximadamente,}$$

lo que significa, aproximadamente, que 18 minutos y 52 segundos antes de las 0 horas comenzó a helarse el estanque.

## OME 5. Problema 2. Solución

a) En este caso la función no es continua en $x = 0$, ya que $x_n = 1/(2n)$ e $y_n = 1/(2n+1)$ son dos sucesiones de números reales que tienden a 0 cuando $n \to \infty$ y se tiene $\lim f(x_n) \neq \lim f(y_n)$.

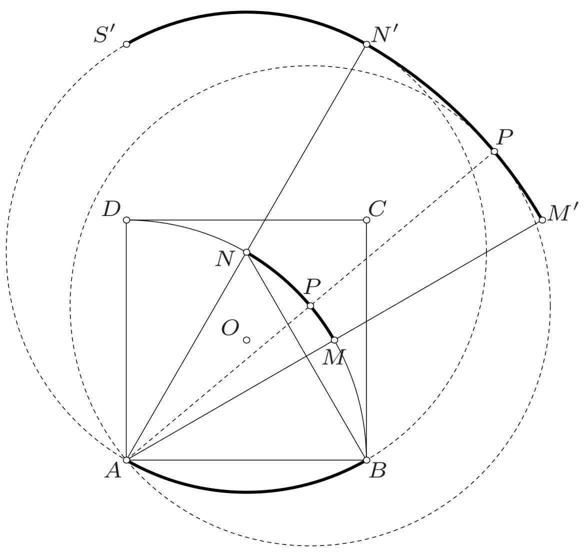
b) Se tiene evidentemente $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = 0 = \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = f(0)$, luego la función $f(x)$ es continua en $x = 0$.

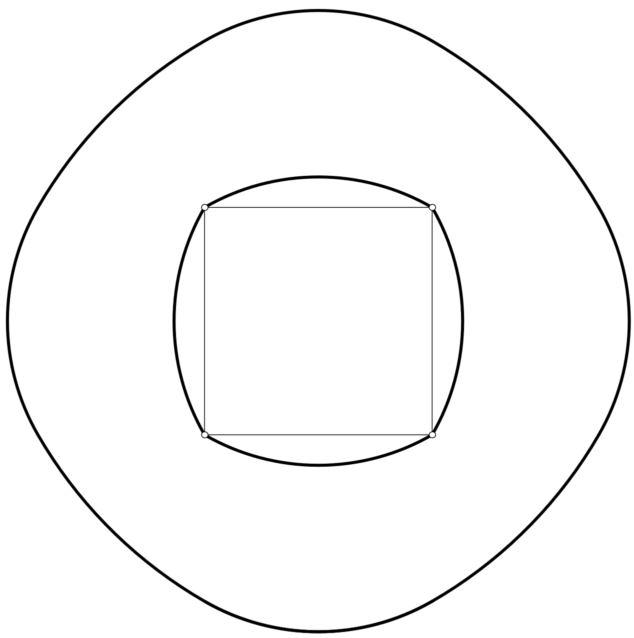
c) No puede decidirse. Por ejemplo, la función $f(x) = 1$ es continua en $x = 0$ y cumple la condición, pero la función $g(x) = 1$ si $x \in \mathbb{Q}$ y 0 en otro caso, cumple la condición y es discontinua en $x = 0$.

## OME 5. Problema 3. Solución

La figura de la izquierda muestra la construcción de una cuarta parte de la figura pedida. Por giros de 90° con centro en O se completa (figura de la derecha).
Cuando $P$ recorre el tercio central del arco $BD$ (centro $A$, radio $a$, amplitud 30° y extremos $M$ y $N$), la circunferencia de centro $P$ y radio $a$ pasa por $A$ y el punto $Q$ (imagen de $P$ en la homotecia de centro $A$ y razón 2) describe el arco de circunferencia $M'N'$ de amplitud 30° y radio $2a$.
Cuando $P$ está sobre $N$ el perfil de la figura pedida lo forman los arcos $N'S'$ y $AB$, ambos de centro $N$ , radio $a$ y amplitud 60° .
La figura de la derecha muestra el contorno completo. La longitud total $L$ del contorno corresponde a cuatro arcos de radio $a$ y amplitud 60°, otros cuatro de radio $2a$ y amplitud 30° para el contorno exterior y cuatro arcos más de radio $a$ y amplitud 60° para el contorno interior; el valor es:

$$L = 4\frac{2\pi a}{6} + 4\frac{4\pi a}{12} + 4\frac{2\pi a}{6} = \frac{16\pi a}{3}.$$



## OME 5. Problema 4. Solución

Tomemos el origen de coordenadas en el espacio en el centro $O$ del diámetro $AB$; el eje $x$ en la dirección $AB$; el eje $y$ en la dirección del diámetro perpendicular a $AB$; y el eje $z$ en la perpendicular por $O$ al plano del pavimento.
Cortando la figura por planos paralelos al $yz$, se determinan triángulos isósceles de la misma altura $h$.
Calcularemos el área $S(x,h)$ de estos triángulos en función de la distancia $x$ entre el plano $Oyz$ y el plano del triángulo considerado. El volumen pedido será entonces

$$2\int_0^r S(x,h)\,dx.$$

Si $PQ$ es la base de uno cualquiera de esos triángulos, a distancia $x$ de $O$, se tiene

$$PQ = 2\sqrt{r^2 - x^2},$$

así que

$$\begin{aligned} V &= 2\int_0^r S(x,h)\,dx = 2\int_0^r \sqrt{r^2-x^2}h\,dx \\ &= 2h\int_0^r \sqrt{r^2-x^2}\,dx, \end{aligned}$$

y como la integral representa la cuarta parte del área del círculo de radio $r$, será

$$V = 2h\,\frac{\pi r^2}{4} = \frac{\pi r^2 h}{2}.$$

## OME 5. Problema 5. Solución

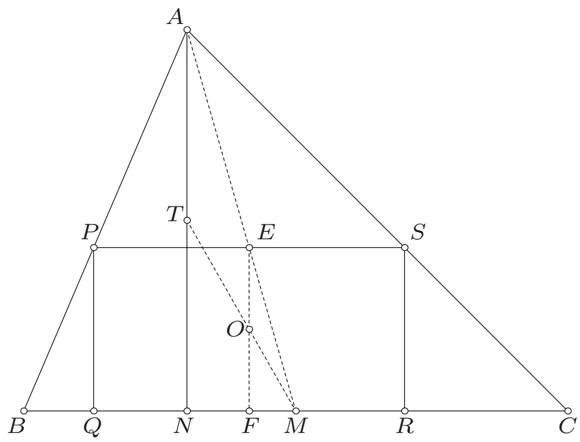
Dos de los vértices del rectángulo han de estar sobre un mismo lado del triángulo; supongamos que este lado es el $BC$.

Sea $AN$ la altura relativa al vértice $A$ y sean $E$ y $F$ los puntos medios de los lados $PS$ y $QR$ respectivamente. El punto $O$ cuyo lugar buscamos es el punto medio de $EF$.

Sabemos que los puntos medios de los segmentos de paralelas a un lado de un triángulo están sobre la mediana relativa a ese lado, por tanto $E$ está sobre la mediana $AM$ de $ABC$ y por la misma causa $O$ está en la mediana $MT$ del triángulo $AMN$ relativa al lado $AN$.

El lugar pedido es el segmento que une el punto medio $M$ de $BC$ con el punto medio $T$ de la altura $AN$.

Haciendo lo mismo con los otro lados, el lugar pedido está formado por tres segmentos que unen el punto medio de cada altura con el punto medio del lado que contiene el pie de esa altura.



**OME 5. Problema 6. Solución**

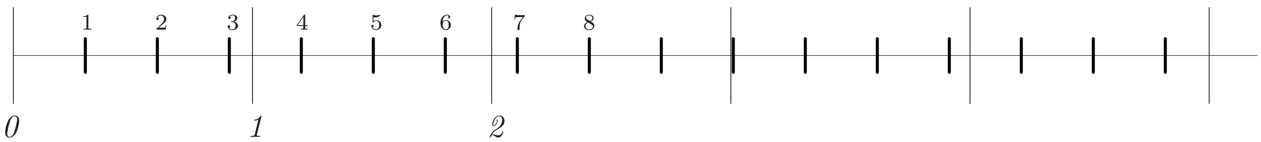
a) La recta perpendicular a una cara en su circuncentro es evidentemente el lugar geométrico de los centros de las esferas que pasan por los tres vértices de dicha cara, de manera que las cuatro perpendiculares se van a cortar en el centro de la (única) esfera circunscrita al tetraedro.

b) No es cierto: considérese el tetraedro (en unos ejes cartesianos ortonormales $OXYZ$) de vértices $O(0,0,0)$, $A(1,1,0)$, $B(0,1,0)$ y $C(0,0,1)$. El ortocentro de la cara $COB$ es el punto $O$, y la perpendicular correspondiente es el eje $OX$. El ortocentro de la cara $OAB$ es el punto $B$, y la perpendicular correspondiente es la recta $x = 0, y = 1$, que se cruza con el eje $OX$.

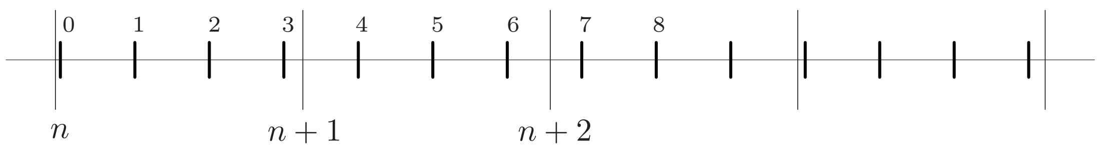
c) No es cierto: considérese el tetraedro (en unos ejes cartesianos ortonormales $OXYZ$) de vértices $O(0,0,0)$, $A(3,0,0)$, $B(0,4,0$ y $C(0,0,3)$. Son sencillas de calcular las coordenadas de los incentros de las caras $OAB$, $OBC$ y $OCA$, resultando ser éstos, respectivamente, los puntos $P(1,1,0)$, $Q(0,1,1)$ y $R(r,0,r)$ con $r = \frac{1}{2}(6-3\sqrt{2})$. Las rectas perpendiculares, a la primera de estas tres caras en $P$ y a la segunda en $Q$, se cortan en el punto $(1,1,1)$, que no pertenece (pues $r \neq 1$) a la perpendicular a la tercera cara en $R$.

## OME 5. Problema 7. Solución

El número de cifras $c_n$ de $2^n$ viene dado por $c_n = 1 + [n \cdot \log 2] = 1 + [n \cdot 0.303103..]$ donde $[x]$ designa la parte entera de $x$ como es habitual.




Puede contestarse a todas las preguntas ayudándonos de una recta con doble graduación, por la parte inferior con los números naturales (marcas mayores) y por la parte superior con la unidad $u = \log 2$ (marcas más cortas).
El número de términos con $p$ cifras coincide con el número de marcas $u_k$ que están comprendidas entre $p - 1$ y $p$.
Como log 2 es irracional estamos seguros de que no pueden coincidir en el mismo punto una marca superior y una inferior.
a) Para que hubiera sólo dos términos con un cierto número de cifras tendría que cumplirse $3u > 1$ cosa que es falsa. La respuesta es negativa.
b) La respuesta también es negativa puesto que la existencia de cinco términos consecutivos con el mismo número de cifras exigiría $4u < 1$, que también es falso.
c) De nuevo respuesta negativa al ser $7u > 2$ mientras que el enunciado exige $7u < 2$.




d) Por lo probado en los dos primeros apartados entre dos marcas mayores consecutivas sólo puede haber tres o cuatro marcas menores.
En el caso más favorable después de un intervalo $(n,\ n+1)$ con cuatro marcas menores (0, 1, 2 y 3) seguido de un intervalo $(n+1,\ n+2)$ con tres marcas menores (4, 5 y 6), la distancia desde la primera marca menor hasta la marca mayor de su izquierda para el caso $n+1$, 4 vale:

$$4u - 1 = 0.20411998$$

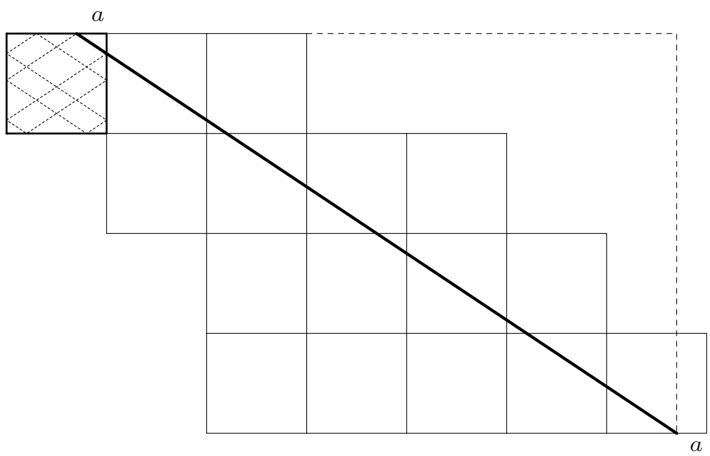
va disminuyendo en los intervalos siguientes, para $n+2$, 7 vale $7u - 2 = 0.10720997$, para $n+3$, 10 la distancia es $10u - 3 = 0.01029996$, y en la siguiente ya es negativa: $13u - 4 = -0.38764005$.
De lo anterior se deduce que existen un máximo de 3 intervalos mayores consecutivos con tres menores cada uno. De esta forma, el número máximo de potencias de 2 consecutivas sin que entre ellas haya 4 con el mismo número de cifras es como mucho 15 (9 de los

intervalos consecutivos con tres menores cada uno, más tres del intervalo anterior y tres del posterior). La cota superior 15 es inalcanzable. Por ejemplo,

$$\begin{array}{rl} 2^{91}, 2^{92}, 2^{93} & \text{tienen 28 cifras,} \\ 2^{94}, 2^{95}, 2^{96} & \text{tienen 29 cifras,} \\ 2^{97}, 2^{98}, 2^{99} & \text{tienen 30 cifras,} \\ 2^{100}, 2^{101}, 2^{102} & \text{tienen 31 cifras,} \\ 2^{103}, 2^{104}, 2^{105} & \text{tienen 28 cifras,} \end{array}$$

Así queda demostrado que el número buscado es 15.

## OME 5. Problema 8. Solución



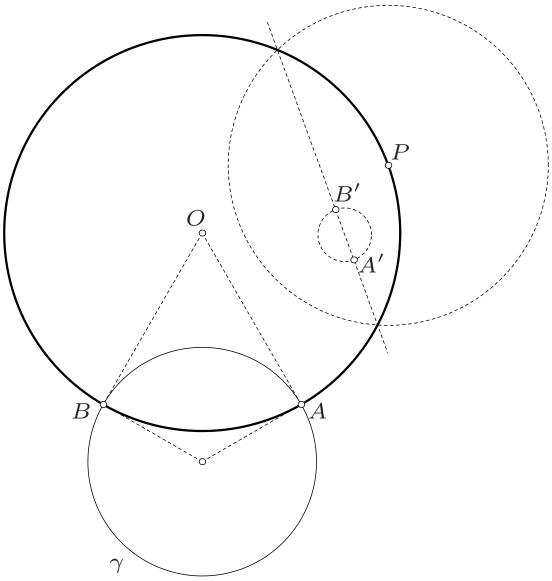

Supongamos $\text{mcd}(m, n) = 1$. En la figura hemos representado el caso $m = 2$, $n = 3$. En general añadiríamos un cuadriculado de $2n$ cuadros hacia la derecha (E) y $2m - 1$ cuadros hacia abajo (S). El rayo de luz debe salir, por ejemplo, hacia la cara E, formando un ángulo cuya tangente sea $\dfrac{2m}{2n} = \dfrac{m}{n}$.

Si $\text{mcd}(m, n) = d$, sean $m = m_1 d$ y $n = n_1 d$. La trayectoria es como la del caso $(m_1, n_1)$ repetida $d$ veces, de modo que el rayo pasa $d - 1$ veces por el punto de partida antes del regreso definitivo.

Es sencillo ver, a partir de la figura anterior, que la longitud total de la trayectoria es, en cualquier caso, $2\sqrt{m^2 + n^2}$ veces el lado del cuadrado.

## OME 6. Problema 1. Solución

El lugar geométrico pedido es la circunferencia ortogonal a la dada que pasa por $A$ y $B$ (en la figura, la de trazo grueso). La clave del problema está en la recta $A'B'$, que es ortogonal a la circunferencia inversa de la dada. Por tanto la inversa de la recta $A'B'$ que es la circunferencia que pasa por $A$, $B$ y $P$, tiene que ser ortogonal a $\gamma$,y su centro es el punto $O$ intersección de las tangentes a $\gamma$ en $A$ y $B$.



## OME 6. Problema 2. Solución

*Primera solución.*

Si $z = a + ib$, entonces $iz = -b + ia$.
Los puntos $(a, b)\,, (-b, a)$ y $(0, 1)$ deben estar alineados, lo cual significa que

$$\frac{0-a}{-b-a} = \frac{1-b}{a-b};$$

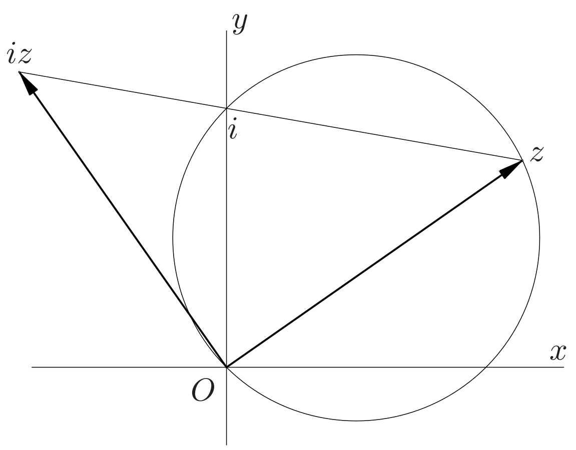
haciendo operaciones y simplificando, resulta

$$a^2 + b^2 - a - b = 0,$$

que es la ecuación de una circunferencia de centro en el punto $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ y radio $\frac{\sqrt{2}}{2}$, es decir, el lugar pedido es la circunferencia circunscrita al cuadrado *unidad*, de vértices $(0,0)\,, (1,0)\,, (1,1)\, y\, (0,1)$.

*Segunda solución.*

Basta observar que el triángulo que tiene vértices en $O$ y en los afijos de $z$ e $iz$ es rectángulo en $O$ y además isósceles. Si $z$ está en el primer cuadrante $iz$ está en el segundo y $i$ está entre $z$ e $iz$ por lo que el ángulo de vértice $z$ mide constantemente $45°$ y sus lados pasan por dos puntos fijos: $(0,0)$ y $(1,0)$. Por tanto el lugar pedido es una parte del arco capaz de $45°$ construido sobre el segmento que une esos puntos, es decir el arco contenido en el primer cuadrante de la circunferencia de la figura.
Si $z$ está en el segundo cuadrante se puede hacer un razonamiento parecido, y desde $z$ se ve el segmento de extremos 0 e $i$ bajo ángulo de $135°$, de forma que el lugar es el arco de la misma circunferencia de antes, pero contenido esta vez en el segundo cuadrante.
El complejo $z$ no puede estar en el tercer cuadrante, y si está en el cuarto, se ve fácilmente que ve los puntos 0 e $i$ bajo ángulo de $45°$, de forma que se trata del arco del cuarto cuadrante de la circunferencia de siempre. En conclusión, el lugar geométrico buscado es dicha circunferencia.



**OME 6. Problema 3. Solución**

Si consideramos el desarrollo plano del cubo, el número de formas de distribuir 6 colores en las 6 casillas o caras es $6! = 720$.
Pero el cubo admite 24 movimientos directos que lo dejan invariante, de forma que para cada configuración de colores, habrá 24 configuraciones equivalentes.
Entonces el número de cubos distinguibles es

$$\frac{6!}{6 \times 4} = \frac{720}{24} = 30.$$

Para ver que hay 24 movimientos directos que dejan invariante el cubo, podemos razonar como sigue: primero observamos que una cara cualquiera puede llevarse a una posición predeterminada, digamos la inferior, es decir, hay 6 formas de llevar las caras a la parte baja del cubo. Una vez hecho esto, todavía podemos girar alrededor del eje vertical (perpendicular a la cara inferior) según 4 movimientos distintos. En total tendremos $6 \cdot 4 = 24$ movimientos distintos.

# OME 6. Problema 4. Solución

Sean $P$, $Q$, $R$ y $S$ los vértices del cuadrado. Supongamos que $P$ y $S$ están sobre la cuerda $CH$, de la que $M$ es su punto medio, y sea $O$ el centro de la circunferencia.
Es claro que el ángulo $\widehat{COM}$, que es la mitad del $\widehat{COH}$, es de $3\pi/8$ radianes.
Así resulta $OM = R\cos\dfrac{3\pi}{8}$, que es precisamente la mitad del lado del cuadrado cuya área se pide.
Entonces, si indicamos por $[PQRS]$ el área pedida,

$$[PQRS] = (2 \cdot OM)^2 = 4R^2 \cos^2 \frac{3\pi}{8}.$$

Podemos expresar este valor sin mención explícita de las razones trigonométricas, porque

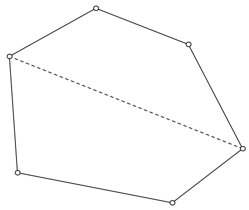
$$2\cos^2 \frac{3\pi}{8} = 1 + \cos\frac{3\pi}{4} = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{2-\sqrt{2}}{2}$$

y finalmente,

$$[PQRS] = \left(2 - \sqrt{2}\right) R^2.$$

## OME 6. Problema 5. Solución

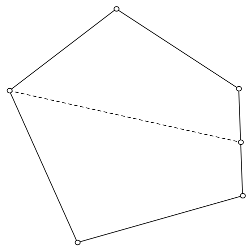
Sea $n$ el número de lados del polígono ($n \geq 3$). Distinguiremos tres casos según las posiciones de los extremos del corte:
a) De vértice a vértice, es decir la recta de corte pasa por dos vértices del polígono.
Si llamamos $a$ y $b$ al número de lados completos del polígono inicial que forman parte de cada uno de los polígonos descompuestos y teniendo en cuenta que estos también son semejantes resulta:



$$a = b;\ a + b = n;\ a + 1 = n$$

y eliminando $a$ y $b$ se deduce que $n = 2$. Esto es imposible pues $n \geq 3$.

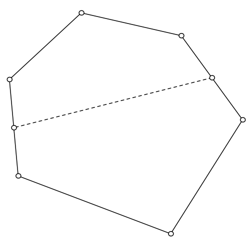
b) De vértice a lado; la recta de corte pasa por un vértice y corta a otro lado.
Con la misma notación que antes se debe cumplir:



$$a + 1 = b + 1;\ 2a + 1 = n;\ a + 2 = n$$

eliminando $a$ y $b$ se deduce que $n = 3$.

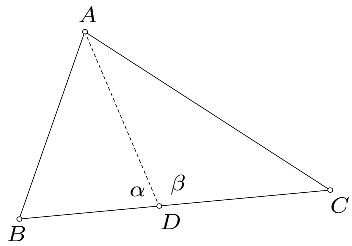
c) De lado a lado, la recta de corte no pasa por ningún vértice.
Ahora las condiciones son:



$$a + 2 = b + 2;\ a + b + 2 = n;\ a + 3 = n$$

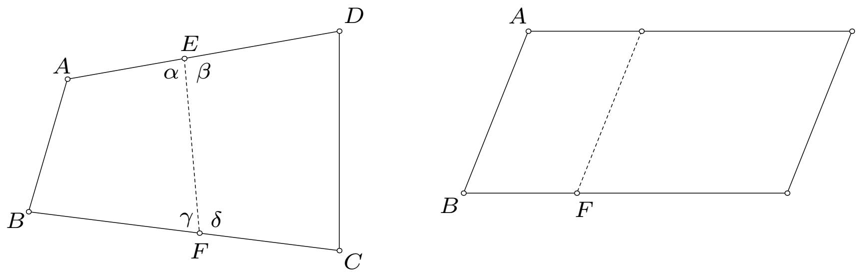
eliminando $a$ y $b$ se deduce que $n = 4$.
Luego sólo es posible para triángulos cuando la recta de corte sólo pasa por un vértice y para cuadriláteros cuando no pasa por ninguno. Analicemos estos casos.

1.- Triángulo.
Por la semejanza de los triángulos $ABD$ y $ABC$, debe cumplirse $A = \alpha$. Análogamente, por la semejanza de los triángulos $ADC$ y $ABC$, debe cumplirse: $A = \beta$.




De donde $2A = \alpha + \beta = 180° \Rightarrow A = \alpha = \beta = 90°$. Esto que exige que el triángulo sea rectángulo e isósceles.

2.- Cuadrilátero.
Por la semejanza de los cuadriláteros $ABFE$ y $ABCD$ se debe cumplir $\gamma = C, \quad \alpha = D$.
Por la semejanza de los cuadriláteros $EFCD$ y $ABCD$ se debe cumplir $\beta = A, \quad \delta = B$.




además (figura de la izquierda), $\alpha + \beta = \gamma + \delta = 180°$, es decir, $A + D = B + C = 180°$ o de modo equivalente $AB$ es paralelo a $CD$ y $AD$ lo es a $BC$. En otras palabras, el cuadrilátero es un paralelogramo y la línea de corte es paralela a dos lados opuestos.
Finalmente, como

$$\frac{AE}{AB} = \frac{ED}{AB} \Rightarrow AE = ED$$

entonces $E$ y $F$ son los punto medios de $AD$ y $BC$ respectivamente. Sólo nos queda determinar la proporción entre los lados del paralelogramo. Por la semejanza de los cuadriláteros $ABFE$ y $ABCD$ y llamando $a = AD$, $b = AB$, tenemos:

$$\frac{\frac{a}{2}}{b} = \frac{a}{b} \iff a^2 = 2b^2 \iff \frac{a}{b} = \sqrt{2},$$

en resumen, los cuadriláteros buscados son todos los paralelogramos cuyos lados estén en razón $\sqrt{2}$.

## OME 6. Problema 6. Solución

1. Tenemos la cadena de equivalencias

$$P(x) \leq P(x)^2 \ \Leftrightarrow\ P(x) - P(x)^2 \leq 0 \ \Leftrightarrow\ P(x)^2 - P(x) \geq 0 \quad \Leftrightarrow P(x)[P(x) - 1] \geq 0,$$

pero si $0 < P(x) < 1$ para algunos valores de $x$, la última desigualdad no es cierta. Así por ejemplo tomando $P(x) = \frac{1}{3}x$ esta última desigualdad no se verifica para $0 < x < 3$.

2. $P(x) < 1 + P(x)^2 \iff P(x)^2 - P(x) + 1 > 0$, lo que es cierto pues,

$$P(x)^2 - P(x) + 1 = \left[P(x) - \frac{1}{2}\right]^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 > 0,$$

para todo $x$ real.

3. $P(x) \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{2}P(x)^2 \ \Leftrightarrow P(x)^2 - 2P(x) + 1 \geq 0 \ \Leftrightarrow [P(x) - 1]^2 \geq 0$, lo que es cierto para todo número real $x$.

4. Las condiciones son equivalentes a $|P(x)| < M(x)$ y a $|Q(x)| < M(x)$ para todo número real $x$.
Pero por ejemplo $|P(x)| < 1 + \big(P(x)\big)^2$, así que basta tomar $M(x) = \big(P(x)\big)^2 + \big(Q(x)\big)^2 + 1$.

## OME 6. Problema 7. Solución

Consideramos los ángulos centrales $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, ..., \alpha_n$ correspondientes respectivamente a los lados $\overline{A_nA_1}$, $\overline{A_1A_2}$, $\overline{A_2A_3}, ..., \overline{A_{n-1}A_n}$.
Entonces la desigualdad de la hipótesis implica que $\alpha_1 > \alpha_2 > \alpha_3 > ... > \alpha_n$. Por tanto,

$$\alpha_1+\alpha_2 > \alpha_2+\alpha_3, \;\; \alpha_2+\alpha_3 > \alpha_3+\alpha_4, \;\; \alpha_3+\alpha_4 > \alpha_4+\alpha_5, \dots , \; \alpha_{n-2}+\alpha_{n-1} > \alpha_{n-1}+\alpha_n.$$

Por otra parte,

$$\hat{A}_1 = 180^\circ - \frac{\alpha_1+\alpha_2}{2}, \;\; \hat{A}_2 = 180^\circ - \frac{\alpha_2+\alpha_3}{2}, \;\; \cdots , \hat{A}_{n-1} = 180^\circ - \frac{\alpha_{n-1}+\alpha_n}{2}.$$

De donde se deduce que

$$180^\circ - \frac{\alpha_1+\alpha_2}{2} < \;\; 180^\circ - \frac{\alpha_2+\alpha_3}{2} < 180^\circ - \frac{\alpha_3+\alpha_4}{2} < \cdots < 180^\circ - \frac{\alpha_{n-1}+\alpha_n}{2},$$

que es equivalente a $\hat{A}_1 < \;\; \hat{A}_2 < \;\; \hat{A}_3 < ... < \hat{A}_{n-1}$.
Como $\alpha_{n-1} < \alpha_1$, entonces

$$180^\circ - \frac{\alpha_{n-1}+\alpha_n}{2} > \;\; 180^\circ - \frac{\alpha_n+\alpha_1}{2},$$

es decir $\hat{A}_{n-1} > \hat{A}_n$.
Análogamente, al ser $\alpha_n < \alpha_2$, $\;\; 180^\circ - \dfrac{\alpha_n+\alpha_1}{2} > \;\; 180^\circ - \dfrac{\alpha_1+\alpha_2}{2}$,
es decir, $\hat{A}_n > \hat{A}_1$, y se cumple que $\hat{A}_{n-1} > \hat{A}_n > \hat{A}_1$.

## OME 6. Problema 8. Solución

a) Indicamos por **1, 2, 3, 4, R** las *posiciones* de las ruedas. Si $\mathcal{G}$ es la transformación $\mathbf{R} \to \mathbf{3} \to \mathbf{2} \to \mathbf{1} \to \mathbf{4} \to \mathbf{R}$, la transformación $\mathcal{G}^2$ será $\mathbf{R} \to \mathbf{2} \to \mathbf{4} \to \mathbf{3} \to \mathbf{1} \to \mathbf{R}$, la $\mathcal{G}^3$ será $\mathbf{R} \to \mathbf{1} \to \mathbf{3} \to \mathbf{4} \to \mathbf{4} \to \mathbf{R}$, la $\mathcal{G}^4$ será $\mathbf{R} \to \mathbf{4} \to \mathbf{1} \to \mathbf{2} \to \mathbf{3} \to \mathbf{R}$, finalmente $\mathcal{G}^5 = \mathcal{I}$.
Es evidente que estas cinco transformaciones forman un grupo cíclico de 5 elementos.

b) Indicamos por $\mathcal{P}_i$ la transformación intercambio $\mathbf{R} \leftrightarrow \mathbf{i}$, correspondiente al intercambio de la rueda del lugar $i$ con la del lugar *recambio*.
Entonces por comprobación directa resulta ser

$$\mathcal{G} = \mathcal{P}_4\mathcal{P}_3\mathcal{P}_2\mathcal{P}_1.$$

Las cuatro transformaciones $\mathcal{P}_i$ no forman grupo ya que el producto de dos de ellas no es otra de las cuatro. Por ejemplo, el producto $\mathcal{P}_2\mathcal{P}_1$ es el intercambio $\mathbf{R} \to \mathbf{1} \to \mathbf{2} \to \mathbf{R}$ que no es ninguna $\mathcal{P}_i$.

*Observación:*
En el lenguaje de la teoría de permutaciones, podemos decir que

$$\mathcal{G} = (\mathbf{R},\mathbf{3},\mathbf{2},\mathbf{1},\mathbf{4})$$

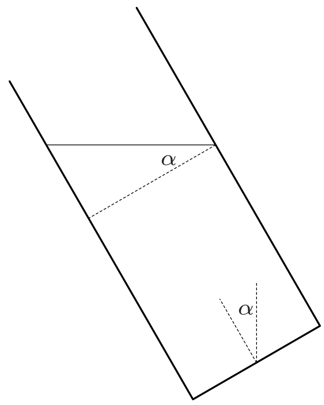
que es un *ciclo de orden 5* dentro del grupo simétrico $\mathcal{S}_5$, y que

$$\mathcal{P}_i = (\mathbf{i},\mathbf{R})$$

son *transposiciones* (ciclos de orden 2). La teoría también dice que todo ciclo es producto de transposiciones, y que éstas se pueden tomar incluso con un elemento común, **R** en nuestro caso. Así

$$(\mathbf{R},\mathbf{3},\mathbf{2},\mathbf{1},\mathbf{4}) = (\mathbf{R},\mathbf{4})\,(\mathbf{R},\mathbf{1})\,(\mathbf{R},\mathbf{2})\,(\mathbf{R},\mathbf{3}).$$

## OME 7. Problema 1. Solución




El líquido desalojado forma un cilindro oblicuo de base elíptica y altura 1 cm.
Si llamamos $r$ al radio de la base del cilindro, el semieje mayor $a$ de la elipse para una inclinación $\alpha$ mide:

$$a = \frac{r}{\cos\alpha}.$$

El semieje menor coincide con el radio $r$ y el volumen del cilindro es

$$V = \pi ab \cdot 1 = \frac{\pi r^2}{\cos\alpha}$$

llamando $d$ a la densidad, tenemos para la inclinación de 30°,

$$40 = \frac{\pi r^2 d}{\cos 30^\circ} \implies \pi r^2 d = 20\sqrt{3}$$

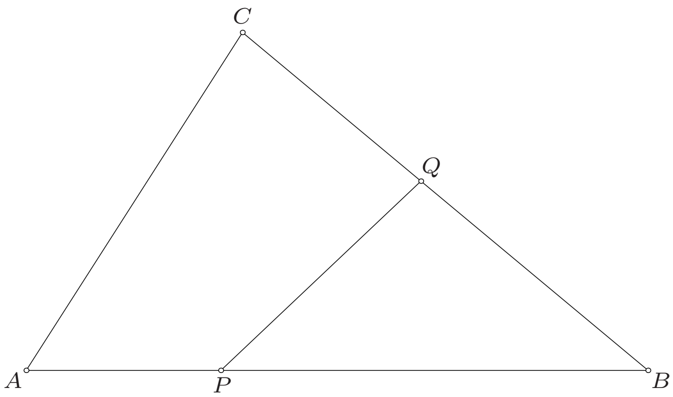
y para la de 45°, si llamamos $p$ al peso del líquido extraído:

$$p = \frac{\pi r^2 d}{\cos 45^\circ} = \frac{2\pi r^2 d}{\sqrt{2}} = \frac{40\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = 20\sqrt{6} \text{ gr.}$$

## OME 7. Problema 2. Solución

Si una yema que tiene *alejamiento* $k$ es sustituida por una bifurcación en dos ramas, terminadas en sendas yemas:
a) El número de ramas aumenta en 2.
b) El número de yemas aumenta en 1.
c) El alejamiento total aumenta en $k+1+k+1-k=k+2$.
d) Cada una de las $k$ ramas por las que pasaba la savia para alimentar a la primitiva yema soporta ahora una yema más, y hay dos nuevas ramas de 1 yema, luego la carga total aumenta en $k+2$.
Respondemos ahora al problema:
1) El número de ramas es igual a $2n$. Para $n=1$ hay dos ramas. Si para $n$ bifurcaciones hay $2n$ ramas, teniendo en cuenta a), para $n+1$ bifurcaciones habrá $2n+2=2(n+1)$ ramas.
2)El número de yemas es igual a $n+1$. Para $n=1$ hay dos yemas. Si para $n$ bifurcaciones hay $n+1$ yemas teniendo en cuenta b), para $n+1$ bifurcaciones hay $(n+1)+1$ yemas.
3) Para $n=1$ la *carga* total es 2, es decir la suma de los *alejamientos* de las dos yemas. Supuesto cierto para $n$, es cierto para $n+1$, ya que por c) y d) se ve que el aumento de la *carga* es igual al aumento de *alejamientos*.

## OME 7. Problema 3. Solución




Suponemos que $PB = \gamma c$, $0 < \gamma < 1$ y que $QB = \alpha a$ siendo $0 \leq \alpha \leq 1$. En este caso $AP = c(1-\gamma)$.
Puesto que el área del triángulo $ABC$ es doble que la del triángulo $PQB$, se deduce que $2\alpha\gamma = 1$. En este caso $Q$ debe ser tal que $BQ = a(1-\dfrac{1}{2\gamma}) \geq 0$, es decir $\gamma \geq \dfrac{1}{2}$. Obviamente si $\gamma = \dfrac{1}{2}$, entonces $Q = B$.
En resumen, siempre que $\gamma \geq \frac{1}{2}$ es posible encontrar $Q$ sin más que elegirlo sobre el lado $BC$ de modo que $\dfrac{QB}{QC} = \dfrac{a(1-\alpha)}{a\alpha} = \dfrac{1}{\alpha} - 1 = 2\gamma - 1$ siendo $\gamma$ la proporción $\dfrac{PB}{AB}$.
Si $\gamma < \dfrac{1}{2}$, entonces $Q$ estaría sobre $AC$ y se razonaría análogamnte.

## OME 7. Problema 4. Solución

Puesto que tienen dos raíces dobles comunes, podemos poner que

$$x^5 - 4x^4 - 13x^3 + 28x^2 + 85x + 50 = (x - x_1)^2(x - x_2)^2(x - \alpha)$$

y que

$$2x^5 - 13x^4 + 4x^3 + 61x^2 + 20x - 25 = 2(x - x_1)^2(x - x_2)^2(x - \beta).$$

Por lo tanto

$$2(x-\beta)(x^5 - 4x^4 - 13x^3 + 28x^2 + 85x + 50) = (x-\alpha)(2x^5 - 13x^4 + 4x^3 + 61x^2 + 20x - 25).$$

De aquí podemos obtener que $\alpha = -2$ y que $\beta = \frac{1}{2}$.
Por lo tanto,

$$\frac{x^5 - 4x^4 - 13x^3 + 28x^2 + 85x + 50}{x+2} = x^4 - 6x^3 - x^2 + 30x + 25 = (x - x_1)^2(x - x_2)^2.$$

De aquí se deduce que

$$\left\{ \begin{array}{ccc} x_1 + x_2 & = & 3 \\ x_1^2 + x_2^2 + 4x_1x_2 & = & -1 \\ x_1x_2^2 + x_2x_1^2 & = & -15 \\ x_2^2x_1^2 & = & 25. \end{array} \right.$$

Además. $x_1$ y $x_2$ deben ser reales, con lo que, necesariamente, se tiene el sistema

$$\left\{ \begin{array}{ll} x_1 + x_2 & = 3 \\ x_1\, x_2 & = 5 \end{array} \right.$$

y las raíces son $x_1 = \dfrac{3+\sqrt{29}}{2}$ y $x_2 = \dfrac{3-\sqrt{29}}{2}$.

## OME 7. Problema 5. Solución

*Primera solución*

Para clarificar el resultado tomaremos una población de referencia de 100 alumnos. Denotaremos por $F$, $M$, $I$ y $PH$, respectivamente, los conjuntos de alumnos que aprueban Física, Matemáticas, Idioma y Filosofía.
Denotaremos con $A^c$ el complementario del conjunto $A$ y con $N(A)$ el cardinal del conjunto $A$. A partir del enunciado se obtiene directamente

$$N(F^c) \leq 30,\ N(M^c) \leq 25,\ N(PH^c) \leq 10 \quad \text{y} \quad N(I^c) \leq 15.$$

Por lo tanto

$$N(F^c \cup M^c \cup PH^c \cup I^c) \leq 30 + 25 + 10 + 15 = 80.$$

Ahora bien, $(F \cap M \cap PH \cap I)^c = F^c \cup M^c \cup PH^c \cup I^c$, luego

$$N(F \cap M \cap PH \cap I) = 100 - N(F^c \cup M^c \cup PH^c \cup I^c) \geq 100 - 80 = 20.$$

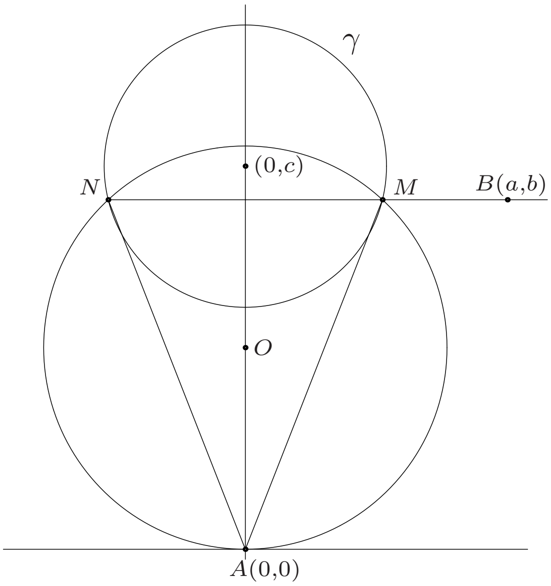
De modo que al menos el 20% de los alumnos aprueban esas cuatro asignaturas.

*Segunda solución*

Supongamos que el número de alumnos es 100. El número total de notas es 400, mientras que el número total de aprobados es, como mínimo, 320. Por lo tanto, por el principio de Dirichlet hay como mínimo 20 alumnos con las cuatro asignaturas aprobadas. Es decir, que como mínimo, el 20% de los alumnos aprueban todas las asignaturas.

**OME 7. Problema 6. Solución**

*Primera solución*




El lado $MN$ del triángulo está en el eje radical de ambas circunferencias, siendo $M$ y $N$ los puntos de intersección de la circunferencia y la secante variable desde el punto $B$.
Elegimos un sistema de referencia en el que la circunferencia tenga ecuación $x^2+(y-c)^2 = r^2$ y sea $A(0,0)$.
La ecuación de la circunferencia que pasa por $A$ y tiene por centro $(\alpha,\beta)$ es
$x^2+y^2-2\alpha x-2\beta y=0$.
El eje radical de las dos circunferencias es

$$2\alpha x-2(c-\beta)y+c^2-r^2=0.$$

La condición sobre $\alpha$ y $\beta$ es que el eje radical pase por $B(a,b)$; es decir,
$2a\alpha-2(c-\beta)b+c^2-r^2=0$, y la ecuación del lugar geométrico es

$$2ax+2by-2bc+c^2-r^2=0.$$

*Segunda solución*

La potencia de $B$ respecto de la circunferencia $\gamma$ es constante y de valor $BM\cdot BN$, y la potencia de $B$ respecto de las circunferencias circunscritas también vale $BM\cdot BN$, y por lo tanto es constante. Podemos entonces hallar el punto $P$ de la recta $AB$ tal que $BA\cdot BP$ sea la potencia de $B$ respecto de $\gamma$, que es conocida. Entonces conocemos dos puntos fijos ($A$ y $P$) de las circunferencias circunscritas y el lugar geométrico del centro está sobre la mediatriz del segmento $AP$.

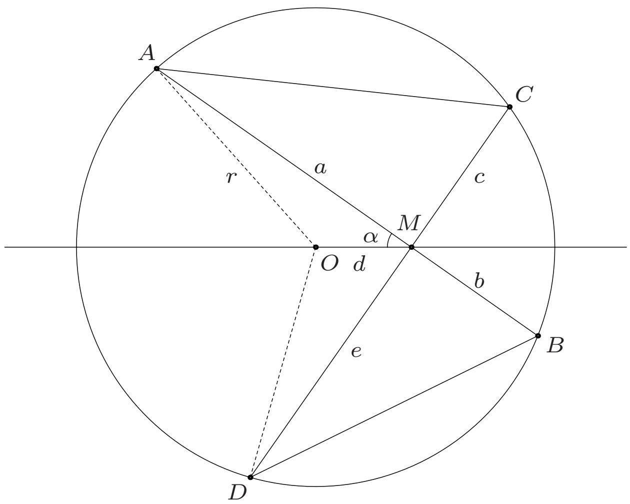
**OME 7. Problema 7. Solución**

Tenemos $\operatorname{sen}^2 x - 2\cos^2 x + \dfrac{1}{2}\operatorname{sen} 2x = 1 - \cos^2 x - 2\cos^2 x + \dfrac{1}{2} 2 \operatorname{sen} x \cos x = 0$,
es decir $1 - 3\cos^2 x + \sqrt{1-\cos^2 x} \cdot \cos x = 0$;
hacemos operaciones y tenemos que resolver la ecuación

$$10\cos^4 x - 7\cos^2 x + 1 = 0,$$

cuyas soluciones son $\cos x = \pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ y $\cos x = \pm\dfrac{\sqrt{5}}{5}$.

**OME 7. Problema 8. Solución**




La suma de las áreas de los triángulos $AMC$ y $BMD$ es

$$S = \frac{ac + be}{2} \geq \sqrt{acbe} = r^2 - d^2,$$

pues $ab = ce = r^2 - d^2$ es la potencia del punto $M$ respecto de la circunferencia. Luego el valor mínimo de $S$ es $r^2 - d^2$, que se alcanza cuando $ac = be$, es decir cuando $a = e$ y $b = c$; entonces el ángulo $\alpha$ es de $45^\circ$ y $\cos 45^\circ = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

**OME 8. Problema 1. Solución**

Se tiene

$$11_{(k} = k+1,$$
$$1331_{(k} = k^3+3k^2+3k+1 = (k+1)^3.$$

Entonces

$$\frac{11_{(k}}{2^{\sqrt[3]{1331_{(k}}}} = \frac{k+1}{2^{k+1}},$$

así que la suma pedida es

$$S = \sum_{k=5}^{k=49} \frac{1+k}{2^{1+k}} = \sum_{k=6}^{k=50} \frac{k}{2^k}.$$

Ahora bien,

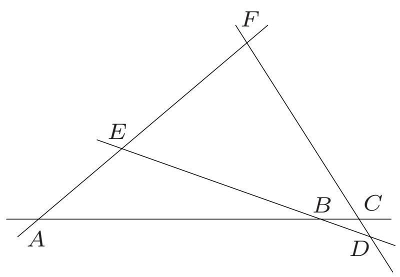
$$2S = \sum_{k=5}^{k=49} \frac{2+2k}{2^{1+k}} = \sum_{k=5}^{k=49} \frac{k}{2^k} + \sum_{k=5}^{k=49} \frac{1}{2^k} = S + \frac{5}{2^5} - \frac{50}{2^{50}} + \frac{\dfrac{1}{2^5} - \dfrac{1}{2^{50}}}{\dfrac{1}{2}},$$

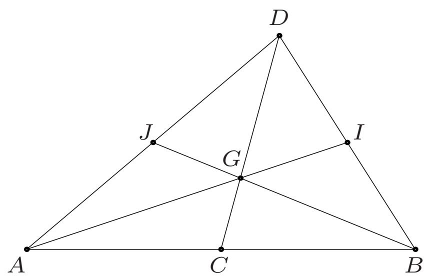
luego,

$$S = \frac{7\cdot 2^{43} - 13}{2^{48}}.$$

## OME 8. Problema 2. Solución

Veamos el *Teorema 1.* De acuerdo con **AII**, sea $E$ un punto que no está en la recta $(AC)$, y sea, por **AIV**, $F$ un punto de la recta $(AE)$ tal que $E$ está entre $A$ y $F$, es decir, el punto $E$ está en el segmento $[AF]$.
Sea, otra vez por **AIV**, $D$ un punto de $(FC)$ tal que $C$ está entre $F$ y $D$, y consideremos la recta $(ED)$. Dicha recta no pasa ni por $A$ ni por $F$ ni por $C$, pues $E \notin (AC)$; y pasa por el punto $E$ del segmento $[AF]$. Entonces por **AVI** debe pasar por un punto de $[AC]$ o por un punto de $[FC]$.
Pero si suponemos que $(ED)$ pasa por un punto $G$ de $[FC]$, entonces por **AV**, $G \neq D$, y por **AI**, $(ED) = (FD)$; luego $(AF) = (FD)$ y $(AC) = (EC)$. Esto es absurdo. Entonces $(ED)$ pasa por un punto $B$ del segmento $[AC]$, así que existe $B \in [AC]$, como se quería probar.




A continuación veamos el *Teorema 2.* Sean $A$, $B$, $C$ tres puntos distintos situados sobre una recta $r$. Por **AII** existe un punto $D$ no situado en $r$; y por el *Teorema 1* existe un punto $G$ que está entre $C$ y $D$. Pero por **AI**, $G$ no está situado en $r$. Y por **AVI** en el triángulo $CDB$, la recta $GA$ corta a $[CB]$ en $A$ (entonces $A$ está situado entre $C$ y $B$) o a $[DB]$ en $I$ (1). Análogamente por **AVI** en el triángulo $CDA$ la recta $GB$ corta a $[CA]$ en $B$ (entonces $B$ está entre $C$ y $A$) o a $[DA]$ en $J$ (2). Si se cumplen (1) y (2) simultáneamente entonces en el triángulo $DJB$ se tiene que $I$ está entre $D$ y $B$ y que la recta $(AI)$ corta a la recta $(JD)$ en $A$, pero como $J$ está entre $A$ y $D$, por **AV** se tiene que $A$ no está entre $J$ y $D$. Por lo tanto por **AVI**, $(AI)$ corta a $[JB]$ en un punto $K$.
Obsérvese que la recta $(AI)$ es la recta $(AG)$ y que la recta $(JB)$ es la recta $(BG)$. $(AG)$ y $(BG)$ tienen un punto común $K$, y como $(AG)$ y $(BG)$ son distintas, por **AI** debe ser $K = G$. Luego $G$ está entre $J$ y $B$ y también está entre $C$ y $D$. En el triángulo $AJB$ se tiene que la recta $(DC)$ corta a la $(AJ)$ en $D$ y como $J$ está entre $A$ y $D$, por **AV**, $D$ no está entre $A$ y $J$, y $(DC)$ corta a $[JB]$ en $G$. Por **AVI**, $(DC)$ corta a $[AB]$ en $C$; por lo tanto $C$ está entre $A$ y $B$.

**OME 8. Problema 3. Solución**

Se tiene

$$\frac{p^2x^2+q^2y^2+2pqxy}{px^2+qy^2} = p+q-\frac{pq(x-y)^2}{px^2+qy^2} \leq p+q < 1.$$

## OME 8. Problema 4. Solución

Se puede probar algo más de lo pedido en el enunciado

$$\frac{\pi}{3} \leq \frac{aA + bB + cC}{a + b + c} < \frac{\pi}{2}.$$

Supongamos $a \geq b \geq c$. Entonces $A \geq B \geq C$ y por lo tanto

$$(a - b)(A - B) \geq 0, \ (b - c)(B - C) \geq 0, \ (c - a)(C - A) \geq 0. \tag{1}$$

Sumando estas desigualdades se obtiene

$$(a - b)(A - B) + (b - c)(B - C) + (c - a)(C - A) \geq 0,$$

y desarrollando se llega a

$$2(aA + bB + cC) \geq (b + c)A + (c + a)B + (a + b)C;$$

sumando a los dos miembros $aA + bB + cC$ resulta

$$3(aA + bB + cC) \geq (a + b + c)(A + B + C),$$

y puesto que $A + B + C = \pi$, ya se obtiene

$$\frac{\pi}{3} \leq \frac{aA + bB + cC}{a + b + c},$$

con igualdad si y sólo si $a = b = c$.

Para probar la segunda desigualdad, como $a$, $b$, $c$ son los lados de un triángulo, se cumplen las desigualdades triangulares

$$\begin{aligned} a + b + c &> 2a, \\ a + b + c &> 2b \\ a + b + c &> 2c \end{aligned}$$

así que, multiplicando respectivamente por $A$, $B$, $C$ y sumando, resulta

$$(a + b + c)(A + B + C) > 2(aA + bB + cC),$$

luego

$$\frac{aA + bB + cC}{a + b + c} < \frac{\pi}{2}.$$

La solución está tomada del libro *Geometric Inequalities*, de Bottema - Djordjevic - Janic - Mitrinovic - Vasic, prob.3.3, p.36; Wolters-Noordhoff, 1968. Según dicho libro, esta demostración sigue la idea de J.Kürschak dada en *Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis* de Polya-Szegö, vol.II, Berlin 1925, pp.166 y 393.

## OME 8. Problema 5. Solución

Obviamente $(1+z^{2^n})(1-z^{2^n}) = 1-(z^{2^n})^2 = 1-z^{2^{n+1}}$ para todo valor de $n$.
Entonces, si $|z| \neq 1$ se tiene

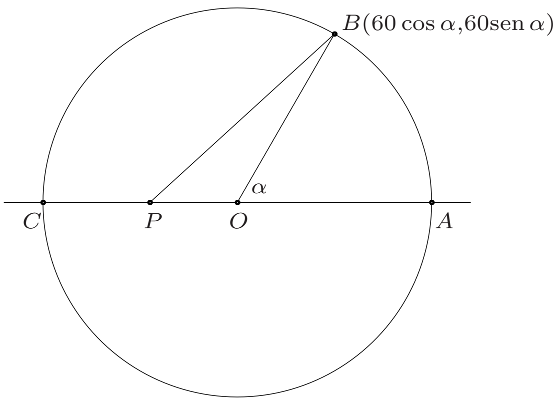
$$(1+z^2)(1+z^{2^2})\dots(1+z^{2^k}) = \frac{1-z^{2^2}}{1-z^2}\cdot\frac{1-z^{2^3}}{1-z^{2^2}}\cdot\dots\cdot\frac{1-z^{2^{k+1}}}{1-z^{2^k}} = \frac{1-z^{2^{k+1}}}{1-z^2},$$

y está claro que

$$\lim_{k\longrightarrow\infty}(1-z^{2^{k+1}}) = 1 \quad \text{cuando } |z|<1.$$

Por lo tanto el límite del producto es $\dfrac{1}{1-z^2}$.

**OME 8. Problema 6. Solución**




Podemos describir los posibles caminos que puede seguir el submarino de la siguiente manera: primero va en línea recta hasta un punto $B$ de la circunferencia y, a continuación, del punto $B$ al punto $A$ a lo largo de la circunferencia.
Puesto que

$$d(P,B) = \sqrt{(60\cos\alpha + 30)^2 + (60\,\mathrm{sen}\,\alpha)^2} = 60\sqrt{\frac{5}{4} + \cos\alpha}\,,$$

el tiempo empleado, en función del ángulo $\alpha$, es

$$T(\alpha) = \frac{60}{v}\sqrt{\frac{5}{4} + \cos\alpha} + \frac{60}{kv}\,\alpha\,.$$

La función $T(\alpha)$ es continua y derivable en $[0,\pi]$, luego su mínimo absoluto se alcanza en algún punto crítico interior o en un extremo del intervalo.
En primer lugar, se tiene $T(0) = \dfrac{90}{\pi}$ y $T(\pi) = \dfrac{30}{v}(1 + \dfrac{2\pi}{k})$, luego $T(\pi) \geq T(0)$ si $k \leq \pi$, y $T(\pi) < T(0)$ si $k > \pi$.
Por otra parte,

$$T'(\alpha) = \frac{60}{v}\left(\frac{-\mathrm{sen}\,\alpha}{\sqrt{5 + 4\cos\alpha}} + \frac{1}{k}\right),$$

luego $T'(\alpha) = 0$ si y sólo si

$$\frac{-\mathrm{sen}\,\alpha}{\sqrt{5 + 4\cos\alpha}} = \frac{1}{k}\,. \tag{1}$$

Si $k < 2$, la ecuación (1) no se satisface para ningún valor de $\alpha$; en este caso el tiempo óptimo es $T(0)$, que corresponde a la trayectoria directa $PA$.

Si $k = 2$, la ecuación (1) se transforma en $(2\cos\alpha+1)^2 = 0$, cuya solución única $\cos\alpha = -\dfrac{1}{2}$ corresponde a $\alpha = \dfrac{2\pi}{3}$. Como $T(\frac{2\pi}{3}) > T(0)$, la trayectoria óptima sigue siendo $PA$.
Cuando $k > 2$ hay dos puntos críticos,

$$\cos\alpha_1 = \frac{-2+\sqrt{4-5k^2+k^4}}{k^2} \quad \text{y } \cos\alpha_2 = \frac{-2-\sqrt{4-5k^2+k^4}}{k^2},$$

$0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \pi$. Del estudio del signo de $T'(\alpha)$ se deduce que $\alpha_1$ corresponde a un máximo relativo y $\alpha_2$ a un mínimo relativo.
Llamaremos $B_2$ al punto correspondiente al ángulo $\alpha_2$ sobre la circunferencia.
Si $k \geq \pi$, resulta evidente (dado que $T(0) \geq T(\pi)$) que el tiempo óptimo es $T(\alpha_2)$, que corresponde a la trayectoria mixta $PB_2A$.
(Obsérvese que,si $k \to \infty$,entonces $\alpha_2 \to \pi$, y la trayectoria óptima es el camino $PCA$.)
Todavía queda por estudiar el problema en el intervalo $2 < k < \pi$. En este caso, como $T(\pi) \geq T(0)$, hay que comparar los valores $T(0)$ y $T(\alpha_2)$. Con ayuda de una calculadora se puede encontrar la única solución de la ecuación $T(0) = T(\alpha_2)$ en dicho intervalo,

$$k_0 = 2,95918....$$

y podemos comprobar que:
Si $2 < k < k_0, T(0) < T(\alpha_2)$ y la trayectoria óptima es $PA$.
Si $k = k_0, T(0) = T(\alpha_2)$ y hay dos trayectorias igualmente óptimas, $PA$ y $PB_2A$.
Si $k_0 < k < \pi, T(0) > T(\alpha_2)$ y la trayectoria óptima es $PB_2A$.
En el caso particular pedido $k = \sqrt{5}$, como $\sqrt{5} < k_0$, la trayectoria óptima será $PA$.

## OME 8. Problema 7. Solución

En una inversión de centro $O$ y potencia $k^2$, una circunferencia cuyo centro diste $d$ de $O$ y cuyo radio sea $r \neq d$, se transforma en otra circunferencia de radio

$$r' = \begin{cases} \dfrac{k^2 r}{r^2 - d^2} & \text{si} \quad d > r, \\ \dfrac{k^2 r}{d^2 - r^2} & \text{si} \quad d < r. \end{cases}$$

Sean $r_1$ y $r_2$ los radios de las circunferencias concéntricas dadas. Supongamos $r_1 < r_2$.
Si $d < r_1$ o $r_2 < d$ la igualdad de radios transformados $\dfrac{k^2 r_1}{r_1^2 - d^2} = \dfrac{k^2 r_2}{r_2^2 - d^2}$ conduce a la relación $d^2 = -r_1 r_2$ que no tiene solución real.
Si $r_1 < d < r_2$, la igualdad $\dfrac{k^2 r_1}{d^2 - r_1^2} = \dfrac{k^2 r_2}{r_2^2 - d^2}$ conduce a la relación $d = \sqrt{r_1 r_2}$.
Toda inversión cuyo centro $O$ esté a una distancia del centro de las circunferencias concéntricas igual a la media geométrica de los radios de dichas circunferencias transformará estas circunferencias en otras dos iguales. La potencia de inversión puede ser cualquiera.

**OME 8. Problema 8. Solución**

Sean $a_1, a_2, \cdots, a_{n+1}$ los números enteros elegidos.
Todo número entero se puede escribir como producto de una potencia de 2 por un factor impar

$$a_r = 2^{b_r} \cdot p_r, \text{ con } p_r \text{ impar.}$$

Ya que todos los $a_i$ son menores o iguales que $2n$, lo mismo ocurre con los factores impares respectivos, $p_i$. Ahora bien, como el número de enteros impares menores que $2n$ es $n$, y tenemos $n+1$ números impares $p_i$, necesariamente al menos dos de ellos serán iguales: $p_j = p_k$. Entonces es claro que de los números $a_j = 2^{b_j} \cdot p_j$ y $a_k = 2^{b_k} \cdot p_j$, uno es divisor del otro (el que tenga menor exponente de 2).

(Problema original de Paul Erdös, propuesto en *The American Mathematical Monthly en 1937.)*

**OME 9. Problema 1. Solución**

a) Evidentemente $(M,+)$ es un grupo abeliano por serlo $\mathbb{K}$. El producto es asociativo, distributivo respecto de $+$ y el elemento unidad es la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

donde $e$ es el elemento unidad de $\mathbb{K}$.
No es conmutativo, por ejemplo

$$\begin{pmatrix} e & 0 \\ 0 & e \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e & 0 \\ e & e \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} e & 0 \\ e & e \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e & e \\ 0 & e \end{pmatrix}, \quad \text{ya que} \quad e \neq 0.$$

b) Sea

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

y su determinante $|A| = ad - bc \in \mathbb{K}$. Si $ad - bc \neq 0$, la matriz

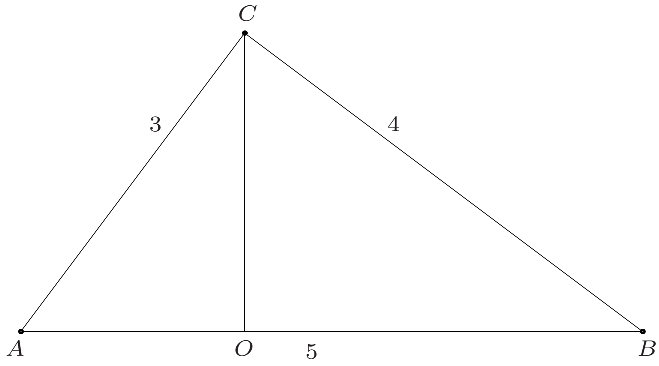
$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

y se tiene que $A \cdot A^{-1} = I$.
Si $ad - bc = 0$ y existiera $A^{-1}$ inversa de $A$, se tendría que $(ad-bc) \cdot |A^{-1}| = |I| = e$, luego $e = 0$, que es absurdo.
c) Evidente, pues dadas dos matrices $A$, $B$ tales que $|A| \neq 0$, $|B| \neq 0$, se tiene

$$|A \cdot B| = |A| \cdot |B| \neq 0,$$

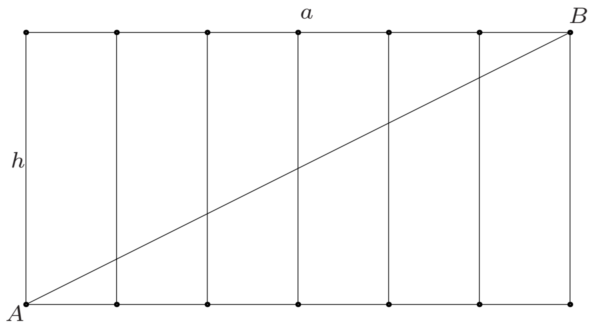
luego $A \cdot B$ también tiene inversa.

**OME 9. Problema 2. Solución**



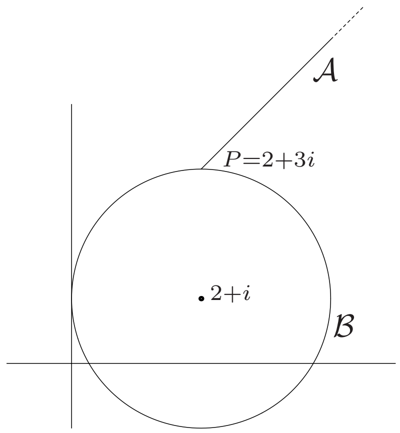

El triángulo es rectángulo en $C$.
Por lo tanto si consideramos los puntos del segmento $AC$, el mínimo se alcanza en $C$ y vale 7, y el máximo se alcanza en $A$ y vale 8.
Si consideramos los puntos del segmento $CB$, el mínimo se alcanza en $C$, vale 7 y el máximo se alcanza en $B$ y vale 9. Y por último si consideramos los puntos del segmento $AB$ , el mínimo se alcanza en $O$, siendo $O$ el centro de la circunferencia circunscrita y vale 7.4; el máximo se alcanza en $B$ y vale 9.
En resumen, el mínimo absoluto está en $C$ y vale 7 y el máximo absoluto se alcanza en $B$ y vale 9.

## OME 9. Problema 3. Solución



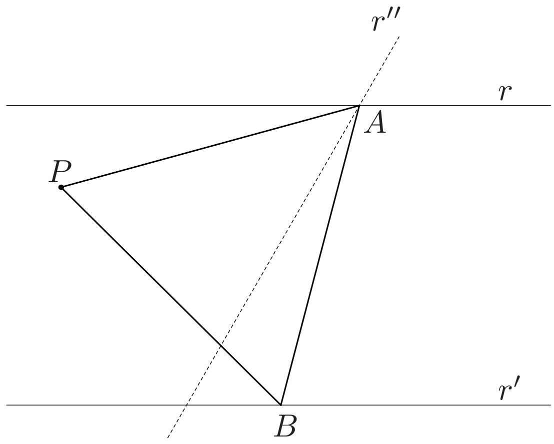

Desarrollando el prisma, se tiene un rectángulo y la poligonal que tiene longitud mínima es la diagonal del rectángulo. Si la altura es $h$ y el lado de la base es $a$, la longitud será $L = \sqrt{h^2 + 36a^2}$.

**OME 9. Problema 4. Solución**




$\mathcal{A}$ es una semirrecta de origen $P = (2+3i)$; $\mathcal{B}$ es el interior del círculo de centro $(2+i)$ y radio 2 excluida la circunferencia. El punto $(2+3i) \notin \mathcal{B}$. Por tanto $\mathcal{A} \cap \mathcal{B} = \emptyset$ y consecuentemente la proyección será $\emptyset$.

**OME 9. Problema 5. Solución**




Con centro $P$ y un ángulo de 60° se gira la recta $r$, obteniéndose la recta $r''$, que no puede ser paralela a $r'$, cortándola en el punto $A$. En el giro opuesto el transformado de $A$ es un punto $B$ de la recta $r$. El triángulo $PAB$ es el pedido. Si el giro se hace en sentido contrario se obtiene otra solución distinta.

## OME 9. Problema 6. Solución

Sean $O$, $O'$, $O''$ los centros de las tres circunferencias dadas. Las longitudes de los lados del triángulo $OO'O''$ son

$$OO' = r + r', \quad O'O'' = r' + r'', \quad O''O = r'' + r.$$

Por lo tanto el perímetro $2p$ de $OO'O''$ es

$$2\left(r + r' + r''\right),$$

de donde

$$p - (r + r') = r'', \quad p - (r' + r'') = r, \quad p - (r + r'') = r'.$$

El área de cualquier triángulo es igual a su semiperímetro por el radio de la circunferencia inscrita, por una parte, y por otra a la expresión dada por la fórmula de Herón:

$$p\,\rho = \sqrt{p\,r r' r''},$$

donde $\rho$ es el radio buscado; así se tiene

$$\rho = \frac{\sqrt{p r r' r''}}{r + r' + r''} = \sqrt{\frac{r r' r''}{r + r' + r''}}.$$

**OME 9. Problema 7. Solución**

Si razonamos por inducción tenemos que para $n = 1$, es $A_1 = 8$; supuesto que $A_n = k \cdot 8$ para algún $k \in \mathbb{N}$, entonces $A_{n+1} = 5^{n+1} + 2 \cdot 3^n + 1 = 4 \cdot 5^n + 5^n + 2 \cdot 3^{n-1} + 4 \cdot 3^{n-1} + 1 = 4 \cdot 5^n + 4 \cdot 3^{n-1} + k \cdot 8 = 4(5^n + 3^{n-1}) + k \cdot 8$, que es múltiplo de 8 pues $5^n + 3^{n-1}$ es un número par.

**OME 9. Problema 8. Solución**

a) Consideremos dos elementos cualesquiera de $L$,

$$(x_1, x_2, x_3); (y_1, y_2, y_3) \quad \text{y} \quad x_1 + x_2 + x_3 = 0, y_1 + y_2 + y_3 = 0.$$

Dados $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, la combinación lineal

$$\alpha(x_1, x_2, x_3) + \beta(y_1, y_2, y_3) = (\alpha x_1 + \beta y_1, \alpha x_2 + \beta y_2, \alpha x_3 + \beta y_3)$$

cumple que:

$$\alpha x_1 + \beta y_1 + \alpha x_2 + \beta y_2 + \alpha x_3 + \beta y_3 = \alpha(x_1 + x_2 + x_3) + \beta(y_1 + y_2 + y_3) = 0$$

con lo cual tenemos que $L$ es un subespacio vectorial.

b) $\overline{x}R\overline{x}$, $\forall \overline{x} \in \mathbb{R}^3$ ya que $\overline{x} - \overline{x} = \overline{0} \in L$, es decir $R$ es reflexiva.
$\forall \overline{x}, \overline{y} \in \mathbb{R}^3$, si $\overline{x}R\overline{y} \Rightarrow \overline{x} - \overline{y} \in L \Rightarrow \overline{y} - \overline{x} \in L \Rightarrow \overline{y}R\overline{x}$; es decir $R$ es simétrica.
$\forall \overline{x}, \overline{y}, \overline{z} \in \mathbb{R}^3$, si $\overline{x}R\overline{y}$ y $\overline{y}R\overline{z}$ entonces $\overline{x} - \overline{y} \in L$ y también $\overline{y} - \overline{z} \in L$. Por lo tanto $\overline{x} - \overline{y} + \overline{y} - \overline{z} \in L$, es decir $\overline{x} - \overline{z} \in L$ y esto quiere decir que $\overline{x}R\overline{z}$, es decir $R$ es transitiva.

c)

$$\begin{aligned}[(-1,3,2)] &= \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 / (-1,3,2)\,\mathcal{R}\,(x_1, x_2, x_3)\} = \\ &= \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 / (1 + x_1, x_2 - 3, x_3 - 2) \in L\} = \\ &= \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 / x_1 + x_2 + x_3 = 4\}\end{aligned}$$

Por ejemplo, $(4,0,0) \in [(-1,3,2)]$ y $(0,4,0) \in [(-1,3,2)]$.

**OME 10. Problema 1. Solución**

Sea $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - 10x^3 + 10x^2$. Se cumple $f'(x) = x^3 - 30x^2 + 20x$; si $f'(x) = 0$, se tiene que $x = 0$ y $x = 15 \pm \sqrt{205}$. Estudiamos la derivada segunda $f''(x) = 3x^2 - 60x + 20$; $f''(0) = 20 > 0$, y $f''(15 + \sqrt{205}) = 20 > 0$; por lo tanto $x = 0$ y $x = 15 + \sqrt{205}$ son puntos de mínimo relativo.
Como $f(0) = 0$ y $f(15 + \sqrt{205}) < 0$, la función alcanza su valor mínimo absoluto en $x = 15 + \sqrt{205} = 29,3178...$.
Se tiene $f(29) = -58659,75$ y $f(30) = -58500$, luego el menor término de la sucesión es $a_{29}$.

# OME 10. Problema 2. Solución

Las tres primeras ecuaciones forman un sistema no homogéneo, cuyas soluciones son

$$
\begin{aligned}
x &= 47z - 22 \\
y &= 21z - 10.
\end{aligned}
$$

Para que se cumpla la inecuación tiene que suceder:

$$
\begin{aligned}
3(47z - 22) + 11(21z - 10) - z + 9 > 0 \\
371z - 167 > 0,
\end{aligned}
$$

es decir,

$$z > \frac{167}{371}.$$

## OME 10. Problema 3. Solución

La sucesión $\mathrm{Re}\,(a_n)$ es convergente, pero el límite no está comprendido entre las cotas indicadas. Sabemos que

$$1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k} = 1 - \log(1-x),$$

que es convergente si $|x| < 1$.
Por otra parte, la sucesión dada es:

$$a_n = 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} e^{ik\frac{\pi}{4}},$$

luego

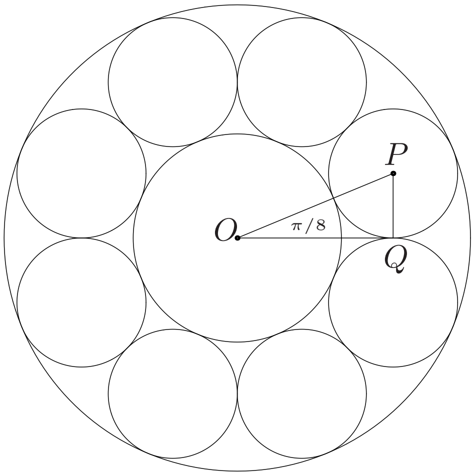
$$\lim_{n\to\infty} a_n = 1 - \log(1 - e^{\frac{i\pi}{4}}) = 1 - \log\sqrt{2-\sqrt{2}} + i\frac{3\pi}{8}.$$

Por lo tanto el límite buscado es:

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{Re}\,(a_n) = \mathrm{Re}\,(\lim_{n\to\infty} a_n) = 1 - \log\sqrt{2-\sqrt{2}},$$

cuyo valor aproximado es $1,2674$.

**OME 10. Problema 4. Solución**




$$OP = \frac{r + r'}{2}$$

$$PQ = \frac{r' - r}{2}$$

En la figura vemos que

$$\operatorname{sen}\frac{\pi}{8} = \frac{\dfrac{r' - r}{2}}{\dfrac{r + r'}{2}} = \frac{\dfrac{r'}{r} - 1}{1 + \dfrac{r'}{r}}$$

de donde se tiene que

$$\frac{r'}{r} = \frac{1 + \operatorname{sen}\dfrac{\pi}{8}}{1 - \operatorname{sen}\dfrac{\pi}{8}}.$$

**OME 10. Problema 5. Solución**

1) Es obvio

2) Si consideramos

$$\lambda_0 \cdot 1 + \lambda_1(x-2) + \lambda_2(x-2)^2 + \lambda_3(x-2)^3 + \lambda_4(x-2)^4 = 0; \quad \lambda_i \in \mathbb{Q} \quad i = 0, \ldots, 4$$

se tiene que $\lambda_i = 0 \quad \forall i$, es decir los polinomios $1$, $x-2$, $(x-2)^2$, $(x-2)^3$ y $(x-2)^4$ son linealmente independientes y como se cumple que

$$P(x) = \sum_{i=0}^{4} \frac{P^{(i)}(2)}{i!}(x-2)^i,$$

también son un sistema generador. (En esta fórmula, $P^{(i)}$ denota la derivada $i$-ésima de $P$, y $P^{(0)} = P$.

3)

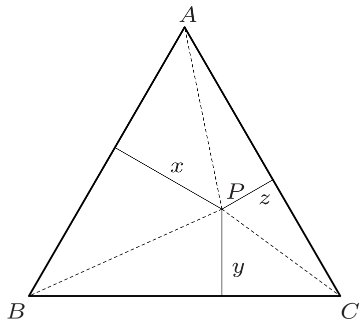
$$\begin{aligned} P(x) = -1 + 38(x-2) + \frac{114}{2!}(x-2)^2 + \frac{144}{3!}(x-2)^3 + \frac{72}{4!}(x-2)^4 = \\ = -1 + 38(x-2) + 57(x-2)^2 + 24(x-2)^3 + 3(x-2)^4. \end{aligned}$$

Esta relación corresponde a $P(x) = 7 + 2x - 15x^2 + 3x^4$. El resultado es

$$P(x) = -121 - 82(x-2) + 27(x-2)^2 + 24(x-2)^3 + 3(x-2)^4.$$

**OME 10. Problema 6. Solución**

a) Sea $a$ el lado del triángulo.

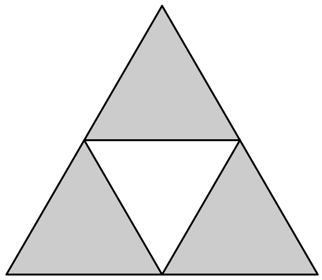



Dividiendo el triángulo $ABC$ en los tres triángulos $PAC$, $PAB$ y $PBC$, se tiene la igualdad

$$\frac{a \cdot 1}{2} = \frac{ax}{2} + \frac{ay}{2} + \frac{az}{2}$$

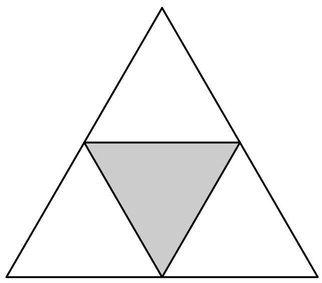
luego $x + y + z = 1$.

b) Son los puntos en los que $x > \dfrac{1}{2}$ o $y > \dfrac{1}{2}$ o $z > \dfrac{1}{2}$



c) Debe ser

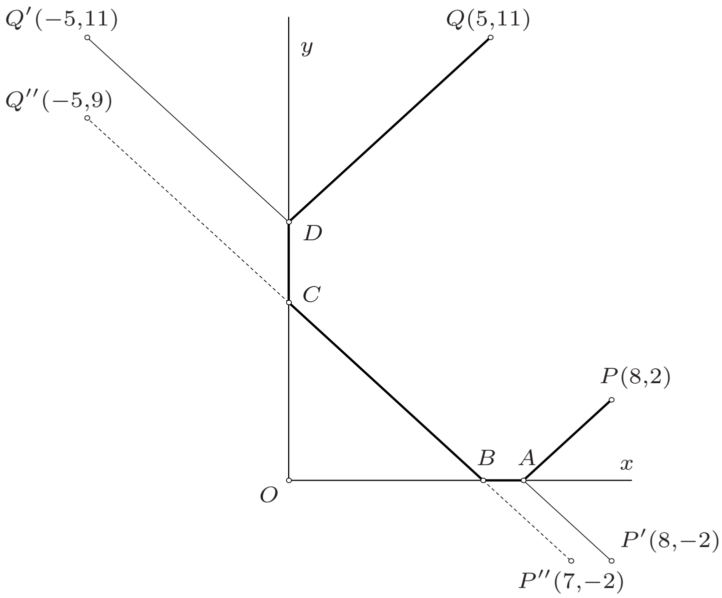
$$x \leq y + z, \quad y \leq x + z, \quad z \leq x + y$$



y la probabilidad será $\dfrac{1}{4}$.

**OME 10. Problema 7. Solución**

Como los trayectos a lo largo de cada eje son de longitud constante sólo debemos preocuparnos de minimizar el resto del trayecto. Para ello se halla $P'$ simétrico de $P$ respecto del eje $OX$ y se transforma en $P''$ por el vector $(-1, 0)$.
Análogamente, $Q'$ es el simétrico de $Q$ respecto del eje $OY$ y se transforma en $Q''$ por el vector $(0, -2)$.




Las intersecciones de la recta $P''Q''$ con los ejes nos dan los puntos $B$ y $C$ en los que el móvil abandona el eje $OX$ y entra en el eje $OY$ respectivamente.
El resto es evidente. Con $B$ y $C$ se determinan $A$ y $D$ y la justificación de longitud mínima es obvia.
La longitud del camino mínimo es:

$$L = 3 + P''Q'' = 3 + \sqrt{12^2 + 11^2} = 19,279....$$

# OME 10. Problema 8. Solución

a) Se trata de la recta que pasa por el punto $(1, 2, -1)$ y tiene como vector director $(-1, -3, 2)$.

b) Una semirrecta contenida en $L$, de origen $(1, 2, -1)$ y que pasa por el punto $(0, 5, 1)$.

c) $(-1, -3, 2)$.

d) $2(1 - t) + 3(2 - 3t) + 2(2t - 1) + 1 = 0$, de donde $t = 1$.

e) $P(3) = (-2, -7, 5)$, el plano pedido es $2(x + 2) + 3(y + 7) + 2(z - 5) = 0$, es decir $2x + 3y + 2z + 15 = 0$.

f) $P(2) = (-1, -4, 3)$, el plano pedido es $-(x + 1) - 3(y + 4) + 2(z - 3) = 0$, es decir $-x - 3y + 2z - 19 = 0$.

## OME 11. Problema 1. Solución

1. Número de vértices: $\dfrac{12\cdot 5}{3}=20.$

2. Número de aristas: $\dfrac{12\cdot 5}{2}=30.$

3. Número de diagonales de todas las caras

$$12\left(\binom{5}{2}-5\right)=60.$$

4. Número de segmentos rectilíneos determinados por cada dos vértices

$$\binom{20}{2}=190.$$

5. Número de diagonales del dodecaedro: $190-30-60=100.$

## OME 11. Problema 2. Solución

Sea $r$ el radio del disco y $\alpha$ la medida en radianes del ángulo del sector. El arco $AB$ de dicho sector tiene una longitud igual a $\alpha r$.
La longitud de la circunferencia de la base del cono es $2\pi r - r\alpha = r(2\pi - \alpha)$, así que el radio $\rho$ de esta circunferencia será

$$2\pi\rho = r(2\pi - \alpha)\,, \quad \text{o sea} \quad \rho = \frac{r(2\pi - \alpha)}{2\pi}\,.$$

Llamando $h$ a la altura del cono, cuya generatriz es $r$, se tendrá

$$h^2 = r^2 - \rho^2 = \frac{r^2}{4\pi^2}(4\pi - \alpha)\alpha,$$

$$h = \frac{r}{2\pi}\sqrt{(4\pi - \alpha)\alpha}\,.$$

Entonces el volumen del cono es:

$$V = \frac{1}{3}\pi\rho^2 h = \frac{r^3}{24\,\pi^2}(2\pi - \alpha)^2\sqrt{(4\pi - \alpha)\alpha}\,,$$

y debemos buscar el máximo relativo en el intervalo $(0, 2\pi)$, de la función

$$f(\alpha) = (2\pi - \alpha)^2\sqrt{(4\pi - \alpha)\alpha}\,.$$

Calculando $f'(\alpha)$, simplificando e igualando a cero obtenemos la ecuación

$$\frac{(2\pi - \alpha)^2 - 2\alpha(4\pi - \alpha)}{\sqrt{(4\pi - \alpha)\alpha}} = 0\,.$$

Por lo tanto debe ser

$$3\alpha^2 - 12\pi\alpha + 4\pi^2 = 0,$$

cuyas soluciones son

$$\alpha = 2\pi \pm \frac{2\sqrt{6}}{3}\pi\,,$$

y como hay que desechar la correspondiente al signo $+$; resulta entonces

$$\alpha = 2\pi - \frac{2\sqrt{6}}{3}\pi \text{ radianes.}$$

**OME 11. Problema 3. Solución**

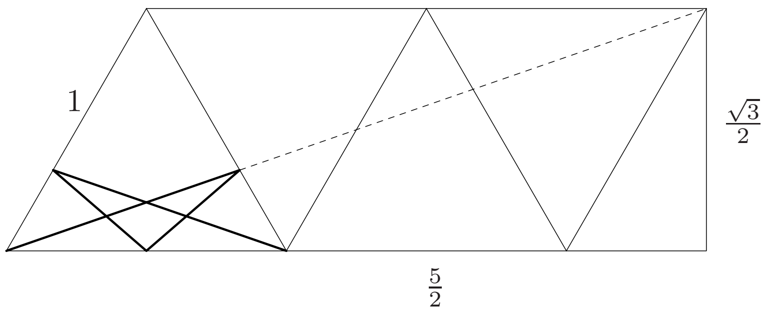
Sean $\alpha \in \mathbb{Z}_{(5)}$, con $\alpha = \dfrac{p}{q}$ y $q \neq \dot{5}$; y $\beta \in \mathbb{Z}_{(5)}$ con $\beta = \dfrac{p'}{q'}$ y $q' \neq \dot{5}$.
Entonces:
$\alpha - \beta = \dfrac{p}{q} - \dfrac{p'}{q'} = \dfrac{pq' - qp'}{qq'}$ siendo $qq' \neq \dot{5}$. Luego $\mathbb{Z}_{(5)}$ es subgrupo de $\mathbb{Q}$.

$\alpha \cdot \beta = \dfrac{p}{q} \cdot \dfrac{p'}{q'} = \dfrac{pp'}{qq'}$ siendo $qq' \neq \dot{5}$. Luego $\mathbb{Z}_{(5)}$ es subanillo de $\mathbb{Q}$.

$\dfrac{5}{2} \in \mathbb{Z}_{(5)}$ y $\dfrac{2}{5} \notin \mathbb{Z}_{(5)}$. Luego $\mathbb{Z}_5$ no es subcuerpo de $\mathbb{Q}$. Por tanto, no puede ser espacio vectorial sobre $\mathbb{Z}_5$ ya que $\mathbb{Z}_{(5)}$ no es cuerpo.

**OME 11. Problema 4. Solución**

Sin más palabras:



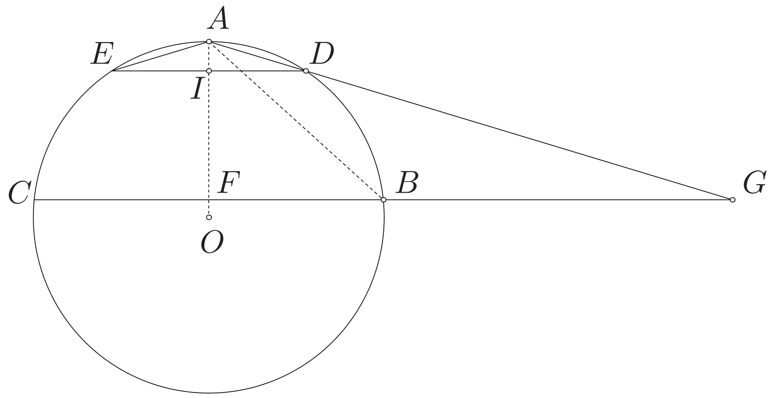

$$l = \sqrt{\frac{25}{4} + \frac{3}{4}} = \sqrt{7}.$$

**OME 11. Problema 5. Solución**

Sean $a, b \in G$. Entonces $a \cdot b \in G$ y $(a \cdot b)(a \cdot b) = e$. Esta igualdad se puede escribir, por la propiedad asociativa, $a(b \cdot a)b = e$, y sale, multiplicando a la derecha por $b$, $a(b \cdot a)(b \cdot b) = e \cdot b = b$. Volviendo a aplicar la propiedad asociativa, queda $(a \cdot a)(b \cdot a) = a \cdot b$, de donde $a \cdot b = b \cdot a$.

## OME 11. Problema 6. Solución

Construimos la recta $BC$ perpendicular a $OA$, y elegimos el punto $G$ de modo que $d(F,G) = 3d(F,B)$.
La recta $GA$ corta a la circunferncia en $D$. Construimos $DE$ perpendicular a $OA$.
La cuerda pedida es $DE$.




Si $d(A,B) = \sqrt{2}$, como el radio de la circunferencia es 1, resulta que $AB$ es el lado del cuadrado inscrito y el punto $F$ coincide con el centro $O$.
En este caso si llamamos $a$ a la altura $AI$ del triángulo isósceles pequeño semejante al triángulo $AOB$, se tiene $ID = 3a$ y $OI = 1 - a$; y por tanto $a = \dfrac{1}{5}$, por lo que los segmentos pedidos miden, uno $\dfrac{\sqrt{2}}{5}$ y el otro $\dfrac{4\sqrt{2}}{5}$.

## OME 11. Problema 7. Solución

Calculemos primero la altura que alcanzaría el agua con el depósito en posición vertical.

$$9 = \frac{3}{2}\sqrt{3} \cdot h, \text{ luego } h = 2\sqrt{3} > 2.$$

Cuando el depósito se inclina, los 9 metros cúbicos de agua se reparten entre el volumen de un prisma recto de altura 2 metros y el de medio prisma recto de altura $h_1$.
En el primero caben $\frac{3\sqrt{3}}{2} \cdot 2 = 3\sqrt{3}$ metros cúbicos, así que el volumen restante cumple

$$9 - 3\sqrt{3} = \frac{1}{2} \cdot \frac{3\sqrt{3}}{2} \cdot h_1,$$

$$h_1 = 4\left(\sqrt{3} - 1\right).$$

Por lo tanto, la altura del agua en la arista opuesta a la indicada en el enunciado es

$$2 + h_1 = 2\left(2\sqrt{3} - 1\right).$$

Este número es efectivamente mayor que $2\sqrt{3}$.

**OME 11. Problema 8. Solución**

Sea $K = L + M + N$.
Si $K$ es par debe ser:

$$L \leq \frac{K}{2}; \quad M \leq \frac{K}{2} \quad y \quad N \leq \frac{K}{2}.$$

Es decir: $L + M \geq N$; $L + N \geq M$ y $M + N \geq L$.
Si $K$ es impar debe ser:

$$0 < L \leq \frac{K-1}{2}; \quad 0 < M \leq \frac{K-1}{2} \quad y \quad 0 < N \leq \frac{K-1}{2}.$$

Es decir: $L + M > N > 0$; $L + N > M > 0$ y $M + N > L > 0$.

Estas condiciones necesarias, también son suficientes: supongamos, sea cual sea la paridad de $K$ y sin perder generalidad, que $L \geq M \geq N$. Comenzamos coloreando de rojo en un orden circular, un lado sí, uno no, hasta completar los $L$ lados rojos. Todos los lados rojos quedan separados. Quedan por colorear $L - 1$ lados desconectados y un tramo de $K - (2L - 1) = M + N - L + 1 \geq 1$ lados consecutivos.
Como $L \geq M$, es $M + N - L + 1 \leq N + 1$, luego este tramo de lados consecutivos se puede colorear alternativamente amarillo-azul-amarillo-etc. sin que haya dos lados consecutivos del mismo color. Y para terminar, los $L - 1$ lados desconectados se colorean de amarillo o azul hasta terminar con los $M$ lados amarillos y los $N$ azules.

**OME 12. Problema 1. Solución**

Para el cálculo del límite se puede seguir el procedimiento de construcción de la integral.

$$\lim_{k \longrightarrow \infty} \frac{1}{n}\left(\frac{1}{n^k} + \frac{2^k}{n^k} \ldots + \frac{(n-1)^k}{n^k} + \frac{n^k}{n^k}\right) = \int_0^1 x^k\,dx = \frac{1}{k+1}.$$

## OME 12. Problema 2. Solución

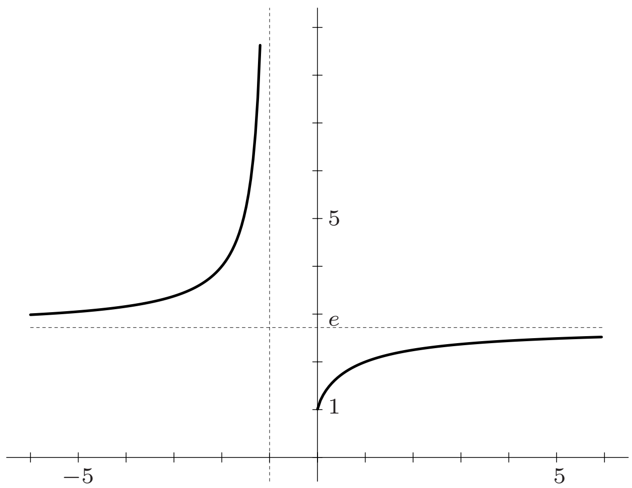
Si analizamos su comportamiento tenemos que

$$\lim_{x \longrightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e; \quad \lim_{\substack{x \longrightarrow -1 \\ x < -1}} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \infty$$

$$\lim_{\substack{x \longrightarrow 0 \\ x > 0}} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = 1; \quad \lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e.$$

Si analizamos su derivada

$$f'(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \left[\log\left(1 + \frac{1}{x}\right) + \frac{-1}{x+1}\right] \Longrightarrow f' > 0.$$



**OME 12. Problema 3. Solución**

Sean $\alpha \in \mathbb{Z}_{(5)}$, con $\alpha = \dfrac{p}{q}$ y $q \neq \dot{5}$; y $\beta \in \mathbb{Z}_{(5)}$ con $\beta = \dfrac{p'}{q'}$ y $q' \neq \dot{5}$.
Entonces:
$\alpha - \beta = \dfrac{p}{q} - \dfrac{p'}{q'} = \dfrac{pq' - qp'}{qq'}$ siendo $qq' \neq \dot{5}$. Luego $\mathbb{Z}_{(5)}$ es subgrupo de $\mathbb{Q}$.

$\alpha \cdot \beta = \dfrac{p}{q} \cdot \dfrac{p'}{q'} = \dfrac{pp'}{qq'}$ siendo $qq' \neq \dot{5}$. Luego $\mathbb{Z}_{(5)}$ es subanillo de $\mathbb{Q}$.

$\dfrac{5}{2} \in \mathbb{Z}_{(5)}$ y $\dfrac{2}{5} \notin \mathbb{Z}_{(5)}$. Luego $\mathbb{Z}_5$ no es subcuerpo de $\mathbb{Q}$. Por tanto, no puede ser espacio vectorial sobre $\mathbb{Z}_5$ ya que $\mathbb{Z}_{(5)}$ no es cuerpo.

*Observación.* Este problema es idéntico al problema 3 de la OME 11.

## OME 12. Problema 4. Solución

*Primera solución*
Consideremos $a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n = 1$ y $S = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$.
Suponemos que no todos son 1.
Sea $a_r$ el mayor y $a_s$ el menor de los elementos $a_i$, $a_r \geq 1$ y $a_s \leq 1$. Se consideran los $n$ números obtenidos al cambiar $a_r$ por 1 y $a_s$ por $(a_r \cdot a_s)$. El producto sigue siendo 1. Haciendo esto la suma $S'$ no aumenta pues

$$S' - S = 1 + a_r \cdot a_s - a_r - a_s = (1 - a_r)(1 - a_s) \leq 0$$

repitiendo el proceso se consigue tener los $n$ números iguales a 1 y su suma será $n$
En el proceso la suma no aumenta, luego $S \geq n$

*Segunda solución*
Se tiene

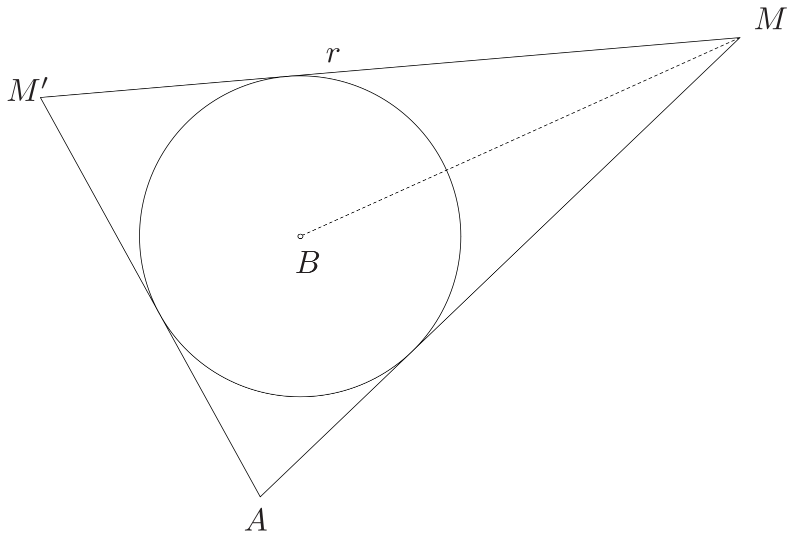
$$a_1 \cdot a_2 \cdots a_n = 1.$$

Aplicando la desigualdad de las medias aritmética y geométrica,

$$\frac{a_1 + \ldots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 \cdots a_n} = \sqrt[n]{1} = 1,$$

que es lo que queríamos demostrar.

## OME 12. Problema 5. Solución




Se traza con centro $B$ la circunferencia tangente a $r$. Se trazan por $A$ las tangentes a la circunferencia anterior que cortan a $r$ en $M$ y $M'$. $B$ es el incentro del triángulo $AM'M$.

## OME 12. Problema 6. Solución

*Primera solución*

Las sucesiones dadas son

$$\begin{array}{lll} 1,1,3,5,11,21,\ldots & \text{que módulo 8 es} & 1,1,3,5,3,5,\ldots \\ 1,7,17,55,127,\ldots & \text{que módulo 8 es} & 1,7,1,7,1,7,\ldots \end{array}$$

*Segunda solución*

(Solución de Murray Klamkin, publicada en su libro *USA Mathematical Olympiad 1972-1986 and forty supplementary problems*).

Resolviendo la ecuación en diferencias para la sucesión $(x_n)$ se obtiene como ecuación característica

$$(t-2)(t+1)=0,$$

con lo cual

$$x_n = \frac{1}{3}\left(2^{n+1} + (-1)^n\right);$$

haciendo lo mismo con la segunda sucesión, obtenemos

$$y_n = 2 \cdot 3^n - (-1)^n .$$

Entonces, para que $x_n = x_m$, debe ser

$$3^{m+1} - 2^n = \frac{1}{2}\left(3(-1)^m + (-1)^n\right).$$

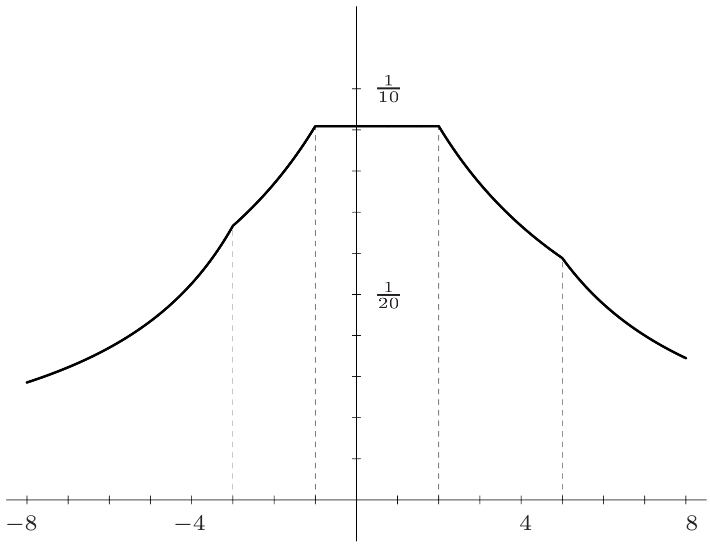
Si $n = 0$ ó $n = 1$, se ve que la única solución es $m = 0$.
Sea $n \geq 2$. Si $m$ y $n$ son de la misma paridad, el segundo miembro de la anterior igualdad es par y el primero es impar.
Si $m$ y $n$ son de distinta paridad, tomando módulo 4 se comprueba que la ecuación no se cumple.

(Origen del problema : Olimpiada U.S.A. 1973).

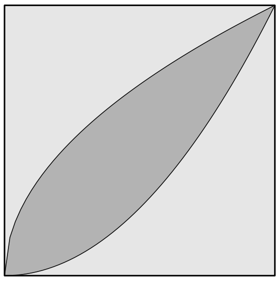
La función dada es la siguiente pepet pepet

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{-4x+3} & \text{si } x \leq -3, \\ \dfrac{1}{-2x+9} & \text{si } -3 < x \leq -1, \\ \dfrac{1}{11} & \text{si } -1 < x \leq 2 \\ \dfrac{1}{2x+7} & \text{si } 2 < x \leq 5 \\ \dfrac{1}{4x-3} & \text{si } 5 < x \end{cases}$$

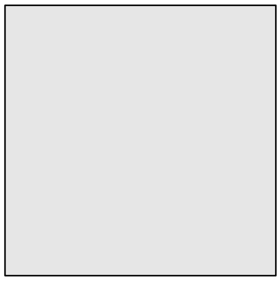
El valor máximo es $\dfrac{1}{11}$ y se alcanza en $-1 \leq x \leq 2$.



**OME 12. Problema 8. Solución**



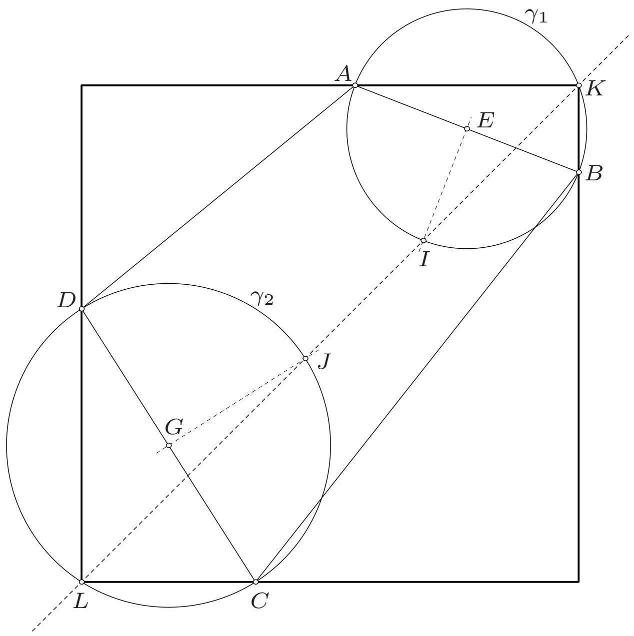
**Casos favorables**



**Casos posibles**

$$p = \frac{2\int_0^1 x^2\,dx}{1} = \frac{2}{3}.$$

**OME 13. Problema 1. Solución**



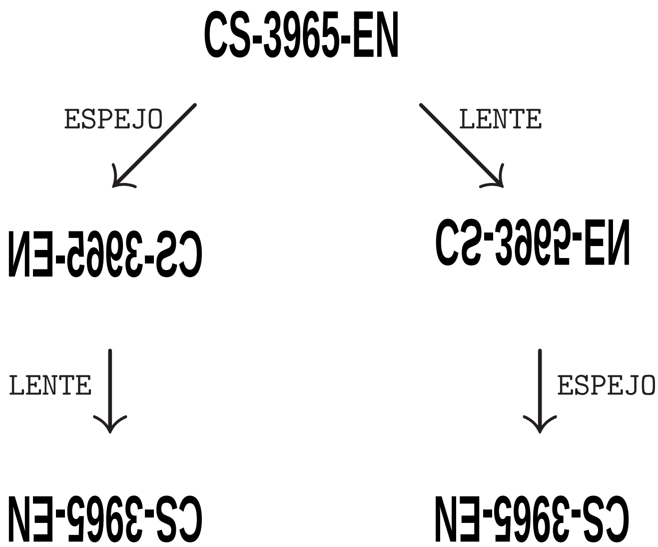

$\gamma_1$, $\gamma_2$ son las circunferencias de diámetros los segmentos $AB$ y $CD$, respectivamente. Los puntos $E$, $G$ son los centros de $\gamma_1$ y $\gamma_2$. La recta perpendicular a $AB$ en $E$ corta a $\gamma_1$ en $I$. La recta perpendicular a $CD$ en $G$ corta a $\gamma_2$ en $J$. La recta $IJ$ es una diagonal del cuadrado pedido. Sus otras intersecciones con $\gamma_1$ y $\gamma_2$ dan los vértices $K$ y $L$ respectivamente. Las rectas $AK$, $BK$, $CL$ y $LD$ contienen a los lados del cuadrado requerido.

**OME 13. Problema 2. Solución**

La suma de todas las componentes de todas las $r-$plas será 0, ya que en cada componente hay la misma cantidad de 1 como de $-1$.
Si excluimos la $r$-upla $(1, 1, 1, \ldots, 1)$, la suma será $-r$.

**OME 13. Problema 3. Solución**

El gráfico siguiente ilustra el comportamiento de la lente y el espejo sobre la matrícula. Las dos transformaciones conmutan.



## OME 13. Problema 4. Solución

Se tiene

$$\frac{n^5-5n^3+4n}{n+2}=\frac{n\left(n^4-5n^2+4\right)}{n+2}=\frac{n\left(n^2-1\right)\left(n^2-4\right)}{n+2}$$
$$=(n-2)(n-1)\,n\,(n+1)\,,$$

que es el producto de 4 enteros consecutivos; de ellos, uno es múltiplo de 4, otro lo es de 3 y además hay otro número par entre ellos : $4\times 3\times 2=24$.

*Observación:*
El producto de $n$ enteros consecutivos siempre es divisible por $n!$, y en este caso, $4!=24$.

## OME 13. Problema 5. Solución

Sea $z = (1-i)\,t$. Con este cambio de variable queda la ecuación $-4t^4+8t+1=0$ con coeficientes reales. La función $f(t) = -4t^4+8t+1$ cambia de signo en los intervalos $[\frac{-1}{8}, \frac{-1}{16}]$ y $[1, \sqrt{2}]$ y su derivada mantiene signo constante en dichos intervalos así que la ecuación tiene dos raíces reales, $x \in (\frac{-1}{8}, \frac{-1}{16})$, $y \in (1, \sqrt{2})$ y dos complejas conjugadas que designaremos por $\alpha$ y $\overline{\alpha}$. Por las relaciones de Cardano

$$x \cdot y \cdot \alpha \cdot \overline{\alpha} = xy|\alpha|^2 = \frac{-1}{4} \implies |\alpha|^2 = \frac{1}{4|x|y}$$

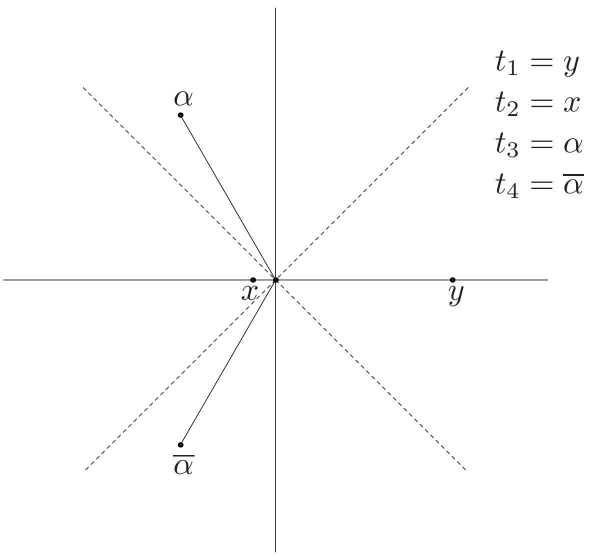
$$x + y + \alpha + \overline{\alpha} = x + y + 2\,\mathrm{Re}(\alpha) = 0 \implies \mathrm{Re}(\alpha) = -\frac{x+y}{2}.$$

En particular, $\mathrm{Re}(\alpha) < 0$, es decir $\alpha$ y $\overline{\alpha}$ están en el segundo y tercer cuadrante.
Ahora bien $|\mathrm{Re}(\alpha)| = \left|\dfrac{x+y}{2}\right| < \dfrac{\sqrt{2}-1/16}{2} < \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ y $|\alpha|^2 = \dfrac{1}{4|x|y} > 1 \Rightarrow |\alpha| > 1$.
De ambas desigualdades podemos deducir que

$$|\cos\big(\mathrm{Arg}(\alpha)\big)| = \frac{|\mathrm{Re}(\alpha)|}{|\alpha|} < \frac{\sqrt{2}/2}{1} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \frac{\pi}{2} < \mathrm{Arg}(\alpha) < \frac{5\pi}{4}.$$

Luego los afijos de las soluciones en $t$ están en el eje $OX$, en el segundo y en el tercer cuadrante. Y por tanto los afijos de las soluciones de la ecuación en $z$ están cada uno en un cuadrante, pues se tiene que

$$\mathrm{Arg}(z_j) = \mathrm{Arg}(1-i) + \mathrm{Arg}(t_j) = \mathrm{Arg}(t_j) - \frac{\pi}{4}.$$



## OME 13. Problema 6. Solución

Consideramos las matrices

$$A = \frac{M + M^T}{2} \quad \text{y} \quad B = \frac{M - M^T}{2};$$

obviamente $A + B = M$ y además $A$ es simétrica pues

$$A^T = \frac{M^T + M}{2} = A$$

y $B$ es antisimétrica ya que

$$B^T = \frac{M^T - M}{2} = -B.$$

## OME 13. Problema 7. Solución

Sea $p$ el peso del diamante entero. Su precio es entonces $k\,p^2$. Si lo dividimos en dos partes, de pesos $x$ y $p-x$, el precio conjunto de los dos diamantes es

$$k\,x^2 + k\,(p-x)^2 = k\,p^2 - 2kx\,(p-x),$$

Por lo tanto, el diamente se deprecia, ya que suponemos $x < p$.
La depreciación es $2kx(p-x)$, y será máxima cuando lo sea el producto $x(p-x)$ de dos factores positivos cuya suma es constante e igual a $p$; por lo tanto será máxima cuando los dos sean iguales, es decir, cuando el diamante se divide en dos partes iguales.

## OME 13. Problema 8. Solución

Las raíces de $x^2 - 4x + 3 = 0$ son $x = 1$, $x = 3$; por lo tanto

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 4x + 3 & \text{si } x \leq 1, \\ -x^2 + 4x - 3 & \text{si } 1 < x \leq 3, \\ x^2 - 4x + 3 & \text{si } x > 3 \end{cases}$$

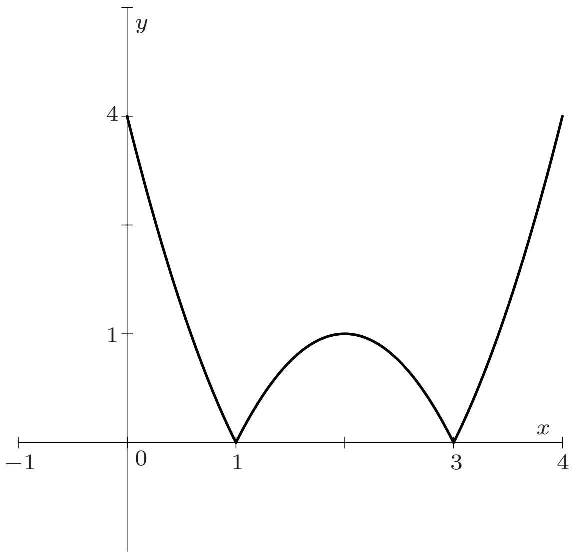
$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = 0, \quad \lim_{x \to 1^+} f(x) = 0 \implies f(x) \quad \text{es continua en } 1.$$

$$f'(x) = \begin{cases} 2x - 4 & \text{si } x < 1, \\ -2x + 4 & \text{si } 1 < x < 3, \\ 2x - 4 & \text{si } x > 3 \end{cases}$$

$$f'(1^-) = -2, \quad f'(1^+) = 2 \implies f(x) \quad \text{no es derivable en } 1.$$

El área pedida es

$$\int_1^3 (-x^2 + 4x - 3)dx = \frac{4}{3}$$



## OME 14. Problema 1. Solución

Hacemos las siguientes transformaciones y cálculos.

$$\begin{vmatrix} 8 & 3 & 3 & \dots & 3 \\ 3 & 8 & 3 & \dots & 3 \\ 3 & 3 & 8 & \dots & 3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 3 & 3 & 3 & \dots & 8 \end{vmatrix} =^{(I)} \begin{vmatrix} 8 & 3 & 3 & \dots & 3 \\ 3 & 8 & 3 & \dots & 3 \\ 3 & 3 & 8 & \dots & 3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 3(n-1)+8 & 3(n-1)+8 & & \dots & 3(n-1)+8 \end{vmatrix} =$$

$$= (3n+5) \begin{vmatrix} 8 & 3 & 3 & \dots & 3 \\ 3 & 8 & 3 & \dots & 3 \\ 3 & 3 & 8 & \dots & 3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \end{vmatrix} =^{(II)} (3n+5) \begin{vmatrix} 5 & 0 & 0 & \dots & 3 \\ -5 & 5 & 0 & \dots & 3 \\ 0 & -5 & 5 & \dots & 3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix} = (3n+5)\cdot 5^{n-1}.$$

Para que $(3n+5)\cdot 5^{n-1}$ sea múltiplo de 10 debe ser $3n+5$ múltiplo de 2 y $n \geq 2$, es decir $n = 2k+1$, $k \geq 1$.
En $(I)$ sumamos a la última fila las demás.
En $(II)$ restamos a cada columna la siguiente.

# OME 14. Problema 2. Solución

La suma y multiplicación de matrices $2 \times 2$ son operaciones asociativas, y la segunda es distributiva respecto de la primera, así que lo serán en particular cuando nos restrinjamos a las matrices del problema.
Por lo tanto, basta ver que:
La matriz nula pertenece a $\mathbb{C}$. En efecto $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}$ .

La matriz identidad pertenece a $\mathbb{C}$. En efecto, $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}$.

$\mathbb{C}$ contiene al opuesto de cada elemento. En efecto,
$\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \in \mathbb{C} \implies \begin{pmatrix} -a & -b \\ b & -a \end{pmatrix} \in \mathbb{C}$.
El producto es conmutativo :

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c & d \\ -d & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ac-bd & ad+bc \\ -ad-bc & ac-bd \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} c & d \\ -d & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ca-db & cb+da \\ -da-cb & -db+ca \end{pmatrix}$$

y las propiedades de las operaciones con números reales justifican la igualdad.
Existencia de inverso para las matrices del conjunto no nulas :
Si

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$$

no es la matriz nula, esto significa que $a$ y $b$ no son ambos cero. Entonces:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

que nos da el sistema $ax - by = 1$, $bx + ay = 0$ que, una vez resuelto nos da la matriz

$$\begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix} = \frac{1}{a^2+b^2} \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto, el conjunto de esas matrices es un cuerpo conmutativo.
Dada $A \in \mathbb{C}$ , vamos a hallar dos matrices $X \in \mathbb{C}$ tales que $X^2 = A$.
Ponemos

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix}.$$

Entonces $X^2 = A$ se escribe como

$$\begin{pmatrix} x^2 - y^2 & 2xy \\ -2xy & x^2 - y^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}.$$

Esto conduce al sistema $x^2 - y^2 = a$, $2xy = b$.
Supongamos $x$ distinto de cero; entonces

$$y = \frac{b}{2x}$$

y al sustituir en la primera ecuación obtenemos la ecuación bicuadrada $4x^4 - 4ax^2 - b^2 = 0$, con lo cual

$$x^2 = \frac{a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2},$$

y delante del radical hay que poner signo + para que el valor resultante de $x^2$ sea positivo. Por lo tanto

$$x = \pm\sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}}$$

Sustituyendo en la primera ecuación, se obtiene para $y^2$ el valor

$$y^2 = \frac{-a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2},$$

donde nuevamente hay que elegir signo + para que $y^2$ resulte positivo. Entonces

$$y = \pm\sqrt{\frac{-a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}}.$$

Los signos de $x$ e $y$ están determinados por la ecuación $2xy = b$; si $b > 0$, los signos deben ser iguales; si $b < 0$, opuestos.
Por ejemplo, para el caso $b > 0$ las dos matrices buscadas son

$$\begin{pmatrix} \sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}} & \sqrt{\frac{-a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}} \\ -\sqrt{\frac{-a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}} & \sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}} \end{pmatrix} \text{ y } \begin{pmatrix} -\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}} & -\sqrt{\frac{-a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}} \\ \sqrt{\frac{-a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}} & -\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}} \end{pmatrix}$$

y análogamente en el caso $b < 0$.

*Observación :* El cuerpo de matrices consideradas es isomorfo al cuerpo de los números complejos.

## OME 14. Problema 3. Solución

Como en cada apretón intervienen dos personas, la suma de los números de apretones dados por cada una de esas 285 personas es par. Si los 285 números fuesen impares, su suma sería impar, luego entre las 285 debe haber al menos una que ha dado un número par de apretones de mano.

**OME 14. Problema 4. Solución**

Expresamos la suma de cuadrados de cinco números consecutivos en la forma

$$(n-2)^2 + (n-1)^2 + n^2 + (n+1)^2 + (n+2)^2 = 5n^2 + 10 = 5(n^2+2).$$

Para que sea un cuadrado perfecto debe ser $(n^2+2) = 5k^2$.
Los restos obtenidos al dividir un cuadrado perfecto entre 5 son:

| $n$ | $n^2$ | $n^2+2$ |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 2 |
| 1 | 1 | 3 |
| 2 | 4 | 1 |
| 3 | 4 | 1 |
| 4 | 1 | 3 |

Por lo tanto, $n^2+2$ no puede ser múltiplo de 5. Y en consecuencia $5(n^2+2)$ no es cuadrado perfecto.

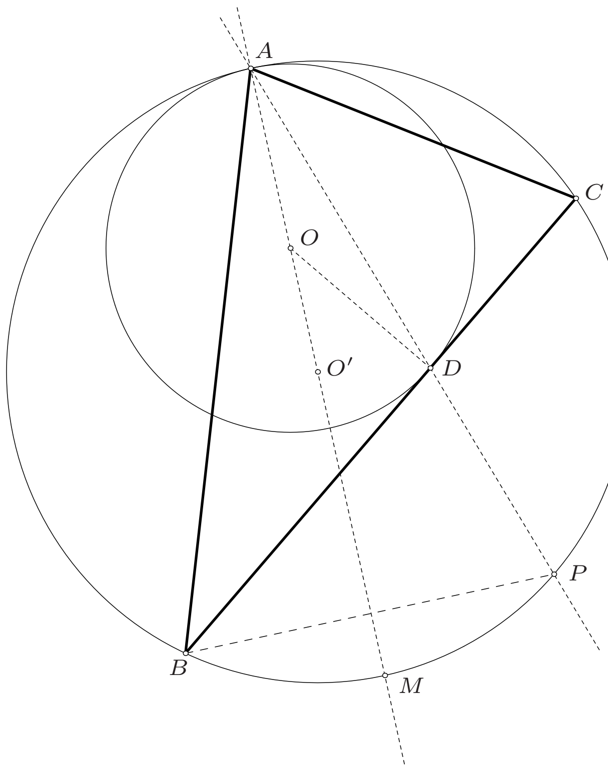
## OME 14. Problema 5. Solución

En el tiempo que tardamos en bajar un escalón se esconden $a$ peldaños de la escalera. Sea $x$ el número de peldaños visibles de la escalera:

$$\begin{cases} 50a + 50 & = x \\ 125\dfrac{a}{5} + x & = 125 \end{cases}$$

cuya solución es $a = 1$ y $x = 100$.

**OME 14. Problema 6. Solución**




Llamamos $O$ al centro de la circunferencia que pasa por $A$ y $D$, y $O'$ al centro de la circunferencia circunscrita al triángulo. Trazamos la recta $AO$, esta corta a la circunferencia circunscrita en $M$. Veamos que $AM$ es un diámetro de esta circunferencia, con lo cual las circunferencias necesariamente son tangentes en $A$,pues $AO$ pasa por $O'$.
Evidentemente, se tienen las siguientes relaciones:
$\widehat{APB} = C$ , $\widehat{CBP} = \dfrac{A}{2}$ , $\widehat{ADC} = B + \dfrac{A}{2}$ y $\widehat{AOD} = \dfrac{\pi}{2} - B - \dfrac{A}{2} = \widehat{OAD}$, pues el triángulo $AOD$ es isósceles.
En esta situación $\operatorname{arco}(AM) = \operatorname{arco}(AC) + \operatorname{arco}(CP) + \operatorname{arco}(PM)$, pero según lo anterior $\operatorname{arco}(AC) = 2\,B$, $\operatorname{arco}(CP) = A$ y $\operatorname{arco}(PM) = \pi - 2\,B - A$, por lo tanto $\operatorname{arco}(AM) = \pi$.

# OME 14. Problema 7. Solución

*Solución de Niven : Maxima and Minima without Calculus, M.A.A. 1981, Ejercicio B31)*
Sea

$$A = \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n} \text{ y pongamos } f(x) = (x - a_1)^2 + (x - a_2)^2 + \cdots + (x - a_n)^2$$

Como se tiene, evidentemente,

$$f(x) = (a_1 - x)^2 + \cdots + (a_n - x)^2 \, ,$$

desarrollando tenemos

$$f(x) - a_1^2 - \cdots - a_n^2 = nx^2 - 2x\,(a_1 + \cdots + a_n) = n\left(x^2 - 2Ax\right),$$

y el mínimo valor de $x^2 - 2Ax$ ocurre cuando $x = A$, ya que

$$x^2 - 2Ax = (x - A)^2 - A^2.$$

# OME 14. Problema 8. Solución

Supongamos en primer lugar que el triángulo es equilátero. Poniendo

$$\alpha = z_1 - z_2, \beta = z_2 - z_3, \gamma = z_3 - z_1,$$

el hecho de ser equilátero se traduce en

$$|z_1 - z_2| = |z_2 - z_3| = |z_3 - z_1|\,,$$

es decir,

$$|\alpha| = |\beta| = |\gamma| \Longleftrightarrow \alpha\overline{\alpha} = \beta\overline{\beta} = \gamma\overline{\gamma}.$$

Pero $\alpha + \beta + \gamma = 0$, así que $\overline{\alpha} + \overline{\beta} + \overline{\gamma} = 0$, lo cual se escribe como

$$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} = 0 \Longleftrightarrow \frac{1}{z_1 - z_2} + \frac{1}{z_2 - z_3} + \frac{1}{z_3 - z_1} = 0,$$

y desarrollando resulta en definitiva la condición

$$z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_3 z_1.$$

Esta condición es también suficiente. En efecto, considerémosla como una ecuación cuadrática en $z_3$ y resolvamos la ecuación

$$z_3^2 - z_3\,(z_1 + z_2) + z_1^2 + z_2^2 - z_1 z_2 = 0.$$

Entonces

$$\begin{aligned} 2z_3 &= z_1 + z_2 \pm \sqrt{(z_1 + z_2)^2 - 4\,(z_1^2 + z_2^2 - z_1 z_2)} = \\ &= z_1 + z_2 \pm \sqrt{(-3)\,(z_1 - z_2)^2} = z_1 + z_2 \pm i\sqrt{3}\,(z_1 - z_2)\,, \end{aligned}$$

es decir

$$z_3 - z_2 = (z_1 - z_2)\, e^{\pm i\pi/3},$$

de donde

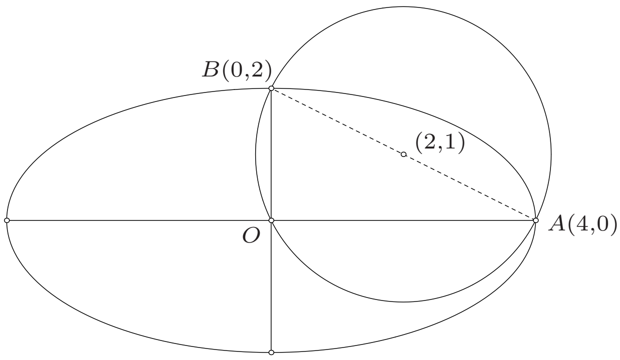
$$|z_3 - z_2| = |z_1 - z_2|$$

y

$$\operatorname{Arg}(z_3 - z_2) - \operatorname{Arg}(z_1 - z_2) = \pm\frac{\pi}{3}$$

y el triángulo es equilátero.

**OME 15. Problema 1. Solución**




$S_1 = \dfrac{\pi \cdot 2 \cdot 4}{4} = 2\pi$, es el área de un cuadrante de la elipse, $S_2 = \dfrac{1}{2} \cdot 4 \cdot 2$ es el área del triángulo $AOB$, y $S_3 = \dfrac{\pi \cdot 5}{2}$ es el área del semicírculo de diámetro $AB$.

El área pedida es $S = S_1 + S_3 - S_2 = 2\pi + \dfrac{5\pi}{2} - 4 = \dfrac{9\pi}{2} - 4$.

## OME 15. Problema 2. Solución

Recordando que los movimientos conservan las distancias vemos que la distancia entre los puntos marcados en las palabras no coincide `.SE.BASTIAN,  NAITSABE..S.` Por lo tanto, no existe un movimiento que transforme una en otra.

Para que pueda existir tal movimiento, las letras que intervienen en la palabra deben ser simétricas respecto de un eje vertical; éstas son `A H I M O T U V W X Y`. Así, por ejemplo, la palabra AVITO se transforma en OTIVA por medio de una simetría axial.

**OME 15. Problema 3. Solución**

*Primera solución*

Es suficiente observar que el primer miembro de esta igualdad es el coeficiente de $x^n$ del polinomio

$$(1+x)^n \cdot (1+x)^n = \left[\binom{n}{0} + \binom{n}{1}x + \ldots + \binom{n}{n}x^n\right]\left[\binom{n}{n} + \binom{n}{n-1}x + \ldots + \binom{n}{0}x^n\right].$$

siendo el segundo miembro el coeficiente de $x^n$ del polinomio

$$(1+x)^{2n} = \binom{2n}{0} + \binom{2n}{1}x + \ldots + \binom{2n}{n}x^n + \ldots + \binom{2n}{2n}x^{2n}.$$

*Segunda solución*

Sea $X = \{a_1, a_2, \cdots, a_m, b_1, b_2, \cdots, b_n\}$ un conjunto de $m+n$ elementos. Vamos a contar el número de combinaciones $r$-arias de $X$.
Suponiendo que una combinación $r$-aria contenga $i$ "aes", donde $i = 0, 1, 2, \cdots, r$, entonces los restantes $r-i$ elementos son "bes"; y en este caso, el número de maneras de formar la combinación considerada es $\binom{m}{i}\binom{n}{r-i}$. Por lo tanto,

$$\sum_{i=0}^{r} \binom{m}{i}\binom{n}{r-i} = \binom{m+n}{r}.$$

Haciendo $m = n = r$ y utilizando la identidad $\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$ se obtiene la igualdad propuesta.

## OME 15. Problema 4. Solución

Por ser la ecuación de coeficientes reales, las soluciones serán, o ambas reales, o complejas conjugadas. Si las dos son reales, $z_1^n + z_2^n$ es un número real; si son complejas conjugadas, expresadas en forma trigonométrica serán

$$z_1 = \rho(\cos\alpha + i\mathrm{sen}\,\alpha) \implies z_1^n = \rho^n(\cos n\alpha + i\,\mathrm{sen}\,n\alpha)$$

$$z_2 = \rho(\cos\alpha - i\mathrm{sen}\,\alpha) \implies z_2^n = \rho^n(\cos n\alpha - i\,\mathrm{sen}\,n\alpha).$$

Por lo tanto $z_1^n + z_2^n = 2\rho^n \cos n\alpha$.

Las soluciones son $z_1 = 1 + i = \sqrt{2}_{\frac{\pi}{4}}$ y $z_2 = 1 - i = \sqrt{2}_{\frac{-\pi}{4}}$.

En consecuencia, $z_1^n + z_2^n = 2\sqrt{2^n}\cos\dfrac{n\pi}{4}$.

**OME 15. Problema 5. Solución**

Haciendo el cambio de variable $x - 3 = t$, los extremos de integración son $-1$ y $1$.

$$\int_2^4 \operatorname{sen}(x-3)^3 dx = \int_{-1}^1 \operatorname{sen} t^3 dt = 0$$

por ser $\sin t^3$ una función impar.

## OME 15. Problema 6. Solución

Sean $U_1$, $U_2$, $U_3$, $U_4$ los sucesos:

$U_1$: la urna contiene 3 bolas blancas y $p(U_1) = \dfrac{1}{8}$,

$U_2$: la urna contiene 2 bolas blancas y 1 negra y $p(U_2) = \dfrac{3}{8}$,

$U_3$: la urna contiene 1 bola blanca y 2 negras y $p(U_3) = \dfrac{3}{8}$,

$U_4$: la urna contiene 3 bolas negras y $p(U_4) = \dfrac{1}{8}$.

Estos sucesos son incompatibles dos a dos, siendo la unión el suceso seguro. Sea $B$ el suceso *"sacar cuatro bolas blancas de la urna"*.
Se tiene,

$$p(B|U_1) = 1, \quad p(B|U_2) = \frac{16}{81}, \quad p(B|U_3) = \frac{1}{81}, \quad p(B|U_4) = 0.$$

Luego, por el teorema de la probabilidad total,

$$P(B) = \frac{1}{8} \cdot 1 + \frac{16}{81} \cdot \frac{3}{8} + \frac{1}{81} \cdot \frac{3}{8} + 0 \cdot \frac{1}{8} = \frac{11}{54}.$$

**OME 15. Problema 7. Solución**

Consideramos el sólido obtenido al girar alrededor de $OX$ la circunferencia de centro $(0, a)$ y radio $r$: $x^2 + (y - a)^2 = r^2$, $a \geq r$.

$$V = V_1 - V_2 = \pi \int_{-r}^{r} (a + \sqrt{r^2 - x^2})^2 \, dx - \pi \int_{-r}^{r} (a - \sqrt{r^2 - x^2})^2 \, dx =$$

$$= \pi \int_{-r}^{r} 4a\sqrt{r^2 - x^2} \, dx = 4\pi a \int_{-r}^{r} \sqrt{r^2 - x^2} \, dx = 4\pi a \frac{\pi r^2}{2} = 2\pi a \pi r^2$$

pues $\int_{-r}^{r} \sqrt{r^2 - x^2} \, dx$ es el área de un semicírculo de radio $r$.

## OME 15. Problema 8. Solución

El polinomio es de la forma

$$1+3x+5x^2+7x^3+...+(2n+1)\,x^n,$$

es decir, $a_0=1, a_1=3=2\times1+1, a_2=5=2\times2+1$, etc.
Cuando este polinomio se deriva por primera vez, desaparece el término independiente $a_0$; al derivarlo por segunda vez, desaparece (modificado por la derivación) el término en $a_1$; y así sucesivamente. Por lo tanto, al derivar por 325-ésima vez, desaparece el término en $a_{324}$. Por lo tanto interesará saber en qué se transforma $a_{325}x^{325}$ después de derivarlo 325 veces: se convertirá en una constante, que será el valor pedido, porque los términos de grado mayor contienen potencias de $x$ que se anularán cuando $x=0$.
Como $a_n=2n+1$, $a_{325}=2\times325+1=651$, así que derivaremos

$$651x^{325}$$

trescientas veinticinco veces. El resultado es

$$651\cdot325!\,.$$

## OME 16. Problema 1. Solución

Supongamos $BC = 5$. El vértice $A$ del triángulo está situado en el arco capaz desde el que se ve el segmento $BC$ bajo ángulo de $30°$. Por lo tanto, el triángulo de área máxima será el triángulo isósceles, cuyo vértice $A$ está lo más alto posible.
En este caso, los otros dos ángulos son de $75°$ cada uno.
Si $h$ es la altura de este triángulo isósceles, se tiene

$$\tan 15° = \frac{5}{2h}.$$

Calculemos $\tan 15°$.

$$\tan^2 15° = \frac{1-\cos 30°}{1+\cos 30°} = \frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}} = (2-\sqrt{3})^2;$$

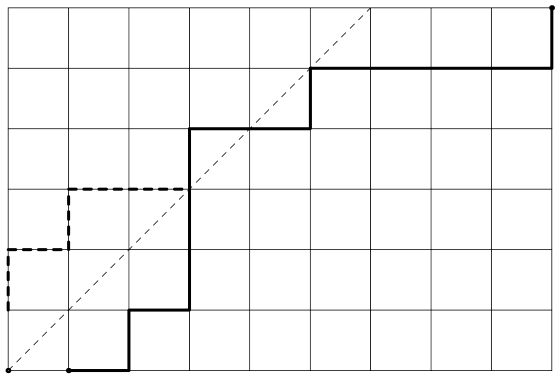
entonces

$$h = \frac{5}{2\left(2-\sqrt{3}\right)} = \frac{5\left(2+\sqrt{3}\right)}{2}$$

y el área del triángulo isósceles es

$$S_{\max} = \frac{25\left(2+\sqrt{3}\right)}{4}.$$

## OME 16. Problema 2. Solución



Un *escrutinio* puede representarse por un camino en la cuadrícula de la figura. Dicho camino va siempre hacia arriba (un voto para $B$) y hacia la derecha (un voto para $A$). Si en un escrutinio el candidato $A$ va siempre por delante del candidato $B$, el camino que lo representa debe estar siempre estrictamente por debajo de la diagonal representada. El número total de caminos de $(0,0)$ a $(9,6)$ es conocido y vale

$$\binom{9+6}{6} = \binom{15}{6} = \frac{15!}{9!\,6!}.$$

El número de caminos desde $(1,0)$ a $(9,6)$ que cortan a la diagonal se puede calcular de la forma siguiente:
El primer voto debe ser para el candidato $A$, luego el camino debe ir del punto $(0,0)$ al punto $(1,0)$ y luego de él al punto $(9,6)$. Si un camino sale de $(1,0)$ y llega a $(9,6)$ *cortando* o *tocando* la diagonal, se puede considerar el punto de corte más a la izquierda. La parte de la izquierda de dicho camino, es decir la parte que va desde $(1,0)$ al primer punto de corte, tiene una figura simétrica que va del punto $(0,1)$ al punto de corte. En otras palabras, hay una correspondencia biyectiva entre los caminos de $(1,0)$ a $(9,6)$ cortando o tocando la diagonal y todos los caminos que van de $(0,1)$ y $(9,6)$. Estos son

$$\binom{9+5}{5} = \binom{14}{5} = \frac{14!}{9!\,5!}.$$

Los que van de $(1,0)$ hasta $(9,6)$ sin tocar la diagonal son

$$\frac{14!}{8!\,6!} - \frac{14!}{9!\,5!} = \frac{3\cdot 14!}{9!\,6!}.$$

La probabilidad buscada es

$$p = \frac{\frac{3\cdot 14!}{9!\,6!}}{\frac{15!}{9!\,6!}} = \frac{1}{5}.$$

# OME 16. Problema 3. Solución

*Primera solución*

*Comentario de* Francisco Bellot Rosado: No es fácil saber la intención del Tribunal de la Olimpiada de ese año al proponer este problema ; en cualquier caso, se trata de la desigualdad de las medias aritmética y armónica, porque la desigualdad propuesta se escribe en la forma

$$\frac{a_1 + \cdots + a_n}{n} \geq \frac{n}{\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}\right)}.$$

Si se da por establecida esa desigualdad, el problema parece trivial; si no es así, hay que basarse en la desigualdad de las medias aritmética y geométrica, y geométrica y armónica, para llegar a la conclusión.
Si no se admite ninguna de las dos desigualdades, habrá que probarlas. Puede verse, por ejemplo, *Niven, Maxima and Minima without Calculus, M.A.A., 1981, p.36.*

Se puede demostrar directamente la desigualdad de la siguiente forma.

$$\begin{aligned}(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}\right) &= \\ &= \sum_1^n \frac{a_i}{a_i} + \sum_{i\neq j} \frac{a_i}{a_j} = \\ &= n + \sum_{i<j}\left(\frac{a_i}{a_j} + \frac{a_j}{a_i}\right) \geq n + 2\,\frac{n(n-1)}{2} = n^2.\end{aligned}$$

En la última desigualdad se ha utilizado que

$$x + \frac{1}{x} \geq 2$$

para todo $x$ real positivo. Como que en este caso sólo vale la igualdad si $x = 1$, podemos deducir que la desigualdad principal del problema es una igualdad si y sólo si

$$a_1 = a_2 = \cdots = a_n.$$

*Segunda solución*

Aplicamos la desigualdad de Cauchy-Schwartz a los vectores

$$x = (\sqrt{a_1}, \sqrt{a_2}, \ldots, \sqrt{a_n}), \quad y = (\frac{1}{\sqrt{a_1}}, \frac{1}{\sqrt{a_2}}, \ldots, \frac{1}{\sqrt{a_n}}).$$

La igualdad se da si y sólo si los dos vectores son linealmente dependientes, es decir, si $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$.

# OME 16. Problema 4. Solución

Dividiendo por $f(x)$ tenemos $\frac{f'(x)}{f(x)} = -x^2$, e integrando resulta

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \int -x^2\,dx \Leftrightarrow \log\big(f(x)\big) = -\frac{x^3}{3} + k.$$

Haciendo $x = 1$ y despejando $k$, queda $1 = k - 1/3$ de donde $k = 4/3$ y la expresión final para la función es:

$$f(x) = e^{\frac{4-x^3}{3}}.$$

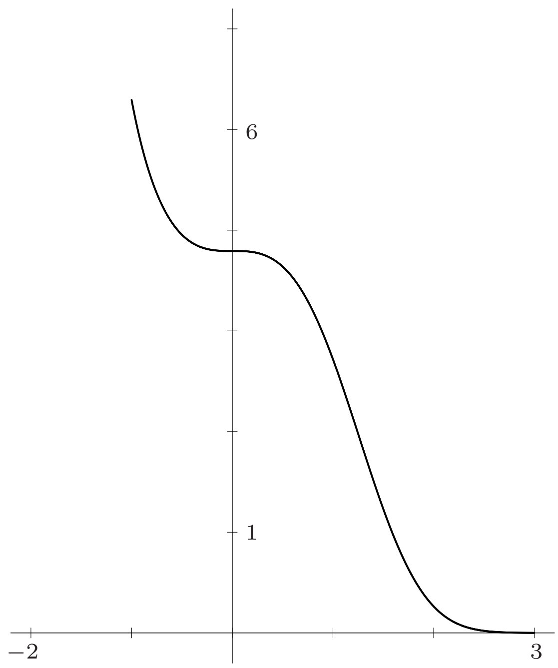
Para representarla basta tener en cuenta que existe, es positiva y continua para todo $x$, y además

$$\lim_{x\to+\infty} = e^{\frac{4-x^3}{3}} = 0, \quad \lim_{x\to-\infty} = e^{\frac{4-x^3}{3}} = +\infty.$$

Derivando:
$f'(x) = -x^2 e^{\frac{4-x^3}{3}} \leq 0$ y se anula sólo para $x = 0$. La función es decreciente con tangente horizontal en $x = 0$.
Volviendo a derivar resulta:

$$f''(x) = \left(x^4 - 2x\right)\, e^{\frac{4-x^3}{3}} = x\left(x^3 - 2\right)\, e^{\frac{4-x^3}{3}}$$

que es negativa en $(-\infty, 0) \cup \left(\sqrt[3]{2}, \infty\right)$, es decir, es una función cóncava; y es positiva en $\left(0, \sqrt[3]{2}\right)$, es decir, es una función convexa y se anula en $x = 0$ y en $x = \sqrt[3]{2}$, donde tiene puntos de inflexión.
En $x = 0$ la función es decreciente y tiene un punto de inflexión con tangente horizontal de ecuación $y = e^{\frac{4}{3}}$. Todo se resume en la gráfica que se dibuja a la derecha.



## OME 16. Problema 5. Solución

Lo demostraremos por inducción sobre $n$.
Supongamos que para todo $k = 1, 2, \ldots, n$ se cumple $x^k + \frac{1}{x^k} = 2\cos k\alpha$.
Veamos que también se cumple para $k = n+1$.

$$(x^n + \frac{1}{x^n})(x + \frac{1}{x}) = x^{n+1} + \frac{1}{x^{n+1}} + x^{n-1} + \frac{1}{x^{n-1}}$$

de donde

$$x^{n+1} + \frac{1}{x^{n+1}} = (x^n + \frac{1}{x^n})(x + \frac{1}{x}) - (x^{n-1} + \frac{1}{x^{n-1}})$$

y por la hipótesis de inducción:

$$x^{n+1} + \frac{1}{x^{n+1}} = 2\cos n\alpha \cdot 2\cos\alpha - 2\cos(n-1)\alpha = 2\big(2\cos n\alpha\cos\alpha - \cos(n-1)\alpha\big)$$

y usando la fórmula trigonométrica:

$$\cos A + \cos B = \frac{1}{2}\big(\cos(A+B) + \cos(A-B)\big),$$

queda:

$$x^{n+1} + \frac{1}{x^{n+1}} = 2\left(\frac{2}{2}\cos\left(n+1\right)\alpha + \frac{2}{2}\cos\left(n-1\right)\alpha - \cos\left(n-1\right)\alpha\right) = 2\cos\left(n+1\right)\alpha.$$

## OME 16. Problema 6. Solución

Calculamos

$$N = n(n+1)(n+2)(n+3)+1 = n^4+6n^3+11n^2+6n+1,$$

y trataremos de identificar este polinomio en $n$ con el cuadrado de un polinomio de segundo grado (también en $n$):

$$\left(n^2+an+b\right)^2 = n^4+2an^3+\left(a^2+2b\right)n^2+2abn+b^2;$$

identificando coeficientes se obtiene el sistema

$$2a=6; \quad a^2+2b=11; \quad 2ab=6; \quad b^2=1$$

que resuelto da la solución $a=3$, $b=1$, con lo cual

$$N = n(n+1)(n+2)(n+3)+1 = \left(n^2+3n+1\right)^2.$$

**OME 16. Problema 7. Solución**

Las ecuaciones paramétricas son claramente $x = \lambda^2,\ y = (2-\lambda)^2$, $0 \le \lambda \le 2$, de las que eliminando $\lambda$ queda:

$$y = (2-\sqrt{x})^2 = 4 + x - 4\sqrt{x} \iff 4\sqrt{x} = x - y + 4. \tag{1}$$

Elevando al cuadrado resulta:

$$16x = x^2 + y^2 + 16 + 8x - 8y - 2xy \iff (x-y)^2 - 8(x+y) + 16 = 0. \tag{2}$$

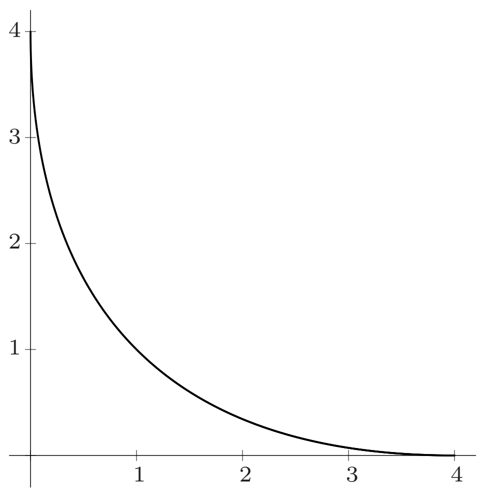
Aplicando un giro de 45° en sentido de las agujas del reloj cuyas ecuaciones son:

$$\begin{cases} x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}x' + \dfrac{\sqrt{2}}{2}y' \\ y = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}x' + \dfrac{\sqrt{2}}{2}y' \end{cases} \quad \text{de donde resulta} \quad \begin{cases} x - y = \sqrt{2}\,x' \\ x + y = \sqrt{2}\,y' \end{cases}$$

que sustituidas en (2) dan lugar a

$$2x'^2 - 8\sqrt{2}y' + 16 = 0 \iff y' = \frac{\sqrt{2}}{4}x'^2 + \sqrt{2}.$$

Se trata claramente de una parábola cuya gráfica se muestra abajo.




Para hallar el área podemos usar la ecuación (1) y resulta:

$$A = \int_0^4 \left(4 + x - 4\sqrt{x}\right) dx = \left[4x + \frac{x^2}{2} - \frac{8}{3}\sqrt{x^3}\right]_0^4 = \frac{8}{3}\,\text{m}^2.$$

# OME 16. Problema 8. Solución

Sean los lados $n$, $n+1$, $n+2$ y el área $n+3$. Si se aplica la fórmula de Herón tendremos

$$n+3=\sqrt{\frac{3n+3}{2}\cdot\frac{n+3}{2}\cdot\frac{n+1}{2}\cdot\frac{n-1}{2}}.$$

Elevando al cuadrado y dividiendo por $n+3$,

$$n+3=\frac{(n+1)^2\cdot(n-1)\cdot 3}{16};$$

lo que, operando convenientemente, nos lleva a

$$3n^3+3n^2-19n-51=0,$$

ecuación cuya única solución real es $n=3$.
Por tanto el único triángulo con los tres lados y el área números enteros consecutivos, en este orden, es el de lados 3, 4 y 5, cuya área es 6.
Veamos ahora que si el área no es el mayor de los números, no existe ninguna solución.
Si el área fuese $n+2$ tendríamos

$$n+2=\sqrt{\frac{3n+4}{2}\cdot\frac{n+4}{2}\cdot\frac{n+2}{2}\cdot\frac{n-2}{2}}.$$

Una solución de esta ecuación es $n=-2$, y las restantes cumplen $3n^3+10n^2-32n-64=0$, donde las únicas soluciones enteras positivas que puede haber son los divisores de 64, y por simple inspección directa se comprueba que ninguno de ellos es solución.
Si el área fuese $n+1$ tendríamos

$$n+1=\sqrt{\frac{3n+5}{2}\cdot\frac{n+5}{2}\cdot\frac{n+1}{2}\cdot\frac{n-1}{2}}.$$

Una solución es $n=-1$, y las restantes cumplen $3n^3+17n^2-11n-41=0$; las únicas posibles soluciones enteras positivas que puede tener esta ecuación son los divisores de 41, y por simple inspección directa se comprueba que ninguno de los dos es solución.
Si el área fuese $n$ tendríamos

$$n=\sqrt{\frac{3n+6}{2}\cdot\frac{n+4}{2}\cdot\frac{n+2}{2}\cdot\frac{n}{2}}.$$

Una solución de esta ecuación es $n=0$, y las restantes cumplen $3n^3+24n^2+44n+48=0$, ecuación sin soluciones positivas.

**OME 17. Problema 1. Solución**

Escribamos la suma en la forma

$$7\left(1+11+111+\cdots+11...11\right),$$

y vamos a calcular la suma del paréntesis. Para eso la escribimos adecuadamente

$$\begin{aligned}
&1\\
&1+10\\
&1+10+100\\
&1+10+100+1000\\
&\;\ldots\\
&1+10+100+1000+\cdots+1000...0
\end{aligned}$$

Y sumamos en columnas, obteniendo

$$\begin{aligned}
&\left(n+10(n-1)+100(n-2)+1000(n-3)+\cdots+10^{n-1}\right)=\\
&\qquad\qquad=n+n(10+10^2+\cdots+10^{n-1})-\\
&\qquad\qquad\quad-\left(10\times 1+2\times 10^2+3\times 10^3+\cdots+(n-1)\times 10^{n-1}\right)
\end{aligned}$$

La primera suma entre paréntesis es una progresión geométrica; la segunda es una progresión aritmético-geométrica, que se suma con el mismo procedimiento que las progresiones geométricas. Sean $S$ y $S'$ las dos sumas, respectivamente. Entonces

$$S=\frac{10\left(10^{n-1}-1\right)}{9}.$$

Para calcular $S'$ procedemos así:
$S'=1\times 10+2\times 10^2+3\times 10^3+\cdots+(n-1)\times 10^{n-1}$, y multiplicando por la razón de la progresión geométrica,

$$10S'=1\times 10^2+2\times 10^3+\cdots+(n-2)\times 10^{n-1}+(n-1)\times 10^n$$

así que restando obtenemos

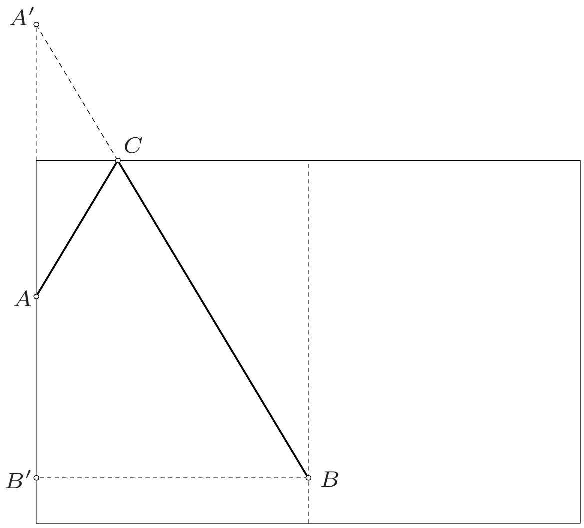
$$S'(1-10)=1\times 10+1\times 10^2+\cdots+1\times 10^{n-1}-(n-1)\times 10^n=\frac{10^{n-1}\times 10-10}{9}-(n-1)\,10^n.$$

Llevando estos valores a la suma que queremos calcular, resulta, tras hacer operaciones y multiplicar por 7,

$$7\left(n+nS-S'\right)=\frac{7}{81}\left(10^{n+1}-9n-10\right).$$

## OME 17. Problema 2. Solución

Desarrollando la superficie lateral del vaso cortando por la generatriz que pasa por el punto en el que está la gota de miel ($A$ en la figura), el problema queda reducido a ir desde el punto en el que se encuentra la mosca $B$ hasta $A$ tocando el borde superior.




Una reflexión de uno de los puntos respecto del borde superior resuelve fácilmente el problema.
La distancia se obtiene del triángulo rectángulo $A'B'B$ y vale:

$$\sqrt{10^2 + 6^2} = \sqrt{136}.$$

## OME 17. Problema 3. Solución

*Primera solución*

Dado que las rectas $r$ y $s$ se cruzan, tienen una perpendicular común que designamos por $t$.
Toda simetría respecto de un eje se puede descomponer en el producto de dos simetrías respecto de dos planos perpendiculares que se cortan según dicho eje.
La simetría respecto de $s$ se puede descomponer en el producto de la simetría respecto del plano definido por $s$ y $t$ y la simetría respecto del plano que contiene a $s$ y es perpendicular a $t$.
Si $\alpha$ es el ángulo que forman las direcciones definidas por $r$ y $s$, la recta $r'$ simétrica de $r$ por la simetría respecto del plano que contiene a $s$ y $t$ forma con $r$ un ángulo $2\alpha$, y la recta $u$ simétrica de $r'$ respecto al plano que contiene a $s$ y es perpendicular a $t$ tiene una dirección que forma con la dirección de $r$ un ángulo $2\alpha$.
La simetría respecto a $r$ se puede descomponer en el producto de la simetría respecto del plano definido por $r$ y $t$ y la simetría respecto del plano que contiene a $r$ y es perpendicular a $t$.
La recta $s'$ simétrica de $s$ por la simetría respecto del plano que contiene a $r$ y $t$ forma con $s$ un ángulo $-2\alpha$, y la recta $v$ simétrica de $s'$ respecto del plano que contiene a $r$ y es perpendicular a $t$ tiene una dirección que forma con la dirección de $s$ un ángulo $-2\alpha$.
Por lo tanto las direcciones de $u$ y $v$ forman un ángulo igual a $3\alpha$. Para que sean coplanarias, debe ser $3\alpha = 180°$, luego $\alpha = 60°$.

*Segunda solución*

Este problema puede resolverse también por geometría analítica, pudiéndose tomar para ello, para facilitar los cálculos y sin perder generalidad,

$$r : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad s : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu \cos\alpha \\ \mu \operatorname{sen}\alpha \\ k \end{pmatrix},$$

con $k \neq 0$, obteniéndose entonces para las rectas simétricas $u$ y $v$ las ecuaciones

$$u : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \cos 2\alpha \\ \lambda \operatorname{sen} 2\alpha \\ 2k \end{pmatrix}, \qquad v : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu \cos\alpha \\ -\mu \operatorname{sen}\alpha \\ -k \end{pmatrix},$$

y la condición de coplanaridad de $u$ y $v$ es $\operatorname{sen} 3\alpha = 0$, luego $\alpha = 60°$.

# OME 17. Problema 4. Solución

Antes de utilizar el cambio sugerido, ponemos

$$\operatorname{sen}(x-2) = \operatorname{sen}\big((x-1)-1\big) = \operatorname{sen}(x-1)\cos 1 + \operatorname{sen} 1 \cos(x-1).$$

Sustituyendo, multiplicando por $\operatorname{sen}(x-1)$ y dividiendo numerador y denominador por $\cos^2(x-1)$ se llega a

$$I = \int \frac{\dfrac{dx}{\cos^2(x-1)}}{\cos 1 \cdot \tan^2(x-1) + \operatorname{sen} 1 \cdot \tan(x-1)} =$$

$$= \int \frac{dt}{t^2 \cos 1 + t\operatorname{sen} 1} = \int \frac{dt}{t(t\cos 1 + \operatorname{sen} 1)}$$

y descomponiendo en fracciones simples, resulta

$$\frac{1}{t(t\cos 1 + \operatorname{sen} 1)} = \frac{\dfrac{1}{\operatorname{sen} 1}}{t} + \frac{-\cot 1}{t\cos 1 + \operatorname{sen} 1},$$

así que

$$I = \frac{1}{\operatorname{sen} 1}\int \frac{dt}{t} - \cot 1 \int \frac{dt}{t\cos 1 + \operatorname{sen} 1} = \frac{1}{\operatorname{sen} 1}\ln|t| - \frac{1}{\sin 1}\cdot \ln|t\cos 1 + \operatorname{sen} 1| + C$$

y deshaciendo el cambio resulta

$$I = \frac{1}{\operatorname{sen} 1}\ln|\tan(x-1)| - \frac{1}{\sin 1}\cdot \ln\big|\cos 1 \cdot \tan(x-1) + \operatorname{sen} 1\big| + C =$$

$$= \frac{1}{\sin 1}\ \ln\left|\frac{\sin(x-1)}{\sin(x-2)}\right| + C.$$

La última igualdad sale de

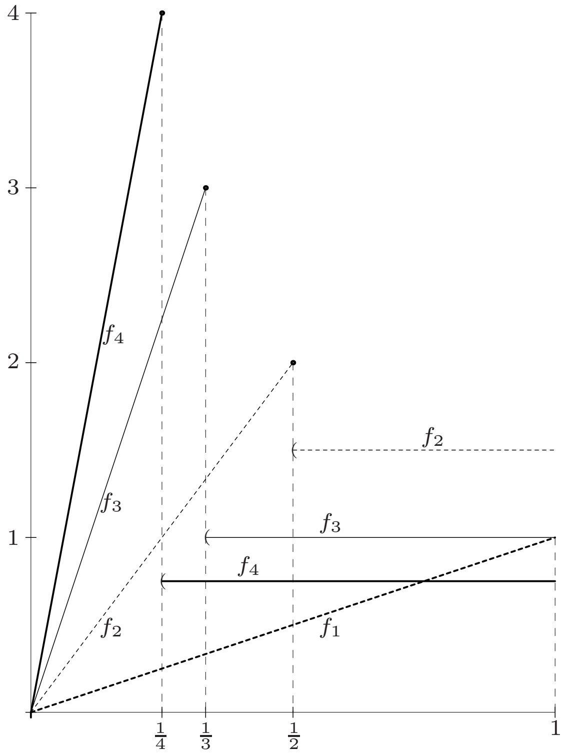
$$\frac{1}{\sin 1}\ln\left|\frac{\tan(x-1)}{\cos 1\ \tan(x-1) + \sin 1}\right| =$$

$$= \frac{1}{\sin 1}\ln\left|\frac{\operatorname{sen}(x-1)}{\cos 1 \operatorname{sen}(x-1) + \sin 1\ \cos(x-1)}\right|.$$

## OME 17. Problema 5. Solución

a) Todas las gráficas se componen de dos segmentos $OP_n$ y $Q_nR_n$, siendo sus coordenadas:

$$P_n\left(\frac{1}{n}, n\right)\ ;\ Q_n\left(\frac{1}{n}, \frac{3}{n}\right)\ ;\ R_n\left(1, \frac{3}{n}\right)$$




Se ha representado la función para $n = 1, 2, 3, 4$ tal como está indicado en al figura.
b) Se tiene

$$A_n = \int_0^1 f_n(x)\,dx = \int_0^{1/n} n^2 x\,dx + \int_{1/n}^1 \frac{3}{n}\,dx =$$

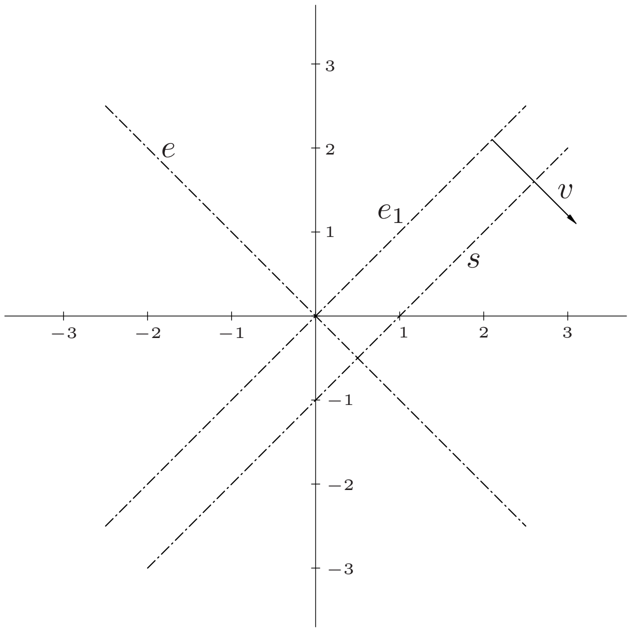
$$= \frac{n^2}{2}\left[x^2\right]_0^{1/n} + \frac{3}{n}\left[x\right]_{1/n}^1 = \frac{n^2}{2}\cdot\frac{1}{n^2} + \frac{3}{n} = \frac{1}{2} + \frac{3}{n}.$$

c) Por el apartado anterior

$$\lim_{n\to\infty} A_n = \frac{1}{2}.$$

**OME 17. Problema 6. Solución**

La simetría de centro $(0,0)$ es un giro de $180°$ que se puede descomponer en producto de dos simetrías de ejes $e_1$ y $e_2$ concurrentes en $(0,0)$ y formando entre sí ángulo de $90°$.




Por otra parte, el producto de dos simetrías es una traslación cuando los ejes de simetría son paralelos y el vector de la traslación producto es perpendicular a ambos ejes y de módulo doble que la distancia entre los ejes paralelos.
Llamando $g$ a la simetría central dada y $s$ a la simetría axial de eje $x = y + 1$, resulta:

$$s \circ g = s \circ (e_1 \circ e) = (s \circ e_1) \circ e = t \circ e$$

siendo $e$ y $e_1$ las simetrías axiales de ejes del mismo nombre trazadas en la figura y $t$ la traslación de vector $\vec{v} = (1, -1)$.
La recta $e_1$ está unívocamente determinada pues ha de ser paralela a $s$ y pasar por el origen; $e$ también lo está por pasar por el origen y ser perpendicular a $s$ .
Finalmente $\vec{v}$ está unívocamente determinado por los datos que fijan su dirección (perpendicular a $s$), sentido (de $e_1$ a $s$) y módulo (doble de la distancia entre las paralelas $e_1$ y $s$).
Por tanto $e$ y $\vec{v}$ son únicos.

## OME 17. Problema 7. Solución

Es una aplicación típica del teorema de Bayes.
Designaremos por $d$ el suceso *"ser defectuosa"* y por $m_k$ el suceso *"estar fabricada en la máquina $k$-ésima"*.
Loas datos del problema son

$$p(m_1) = 0.1, \quad p(m_2) = 0.2, \quad p(m_3) = 0.3 \quad p(m_4) = 0.4$$

$$p(d|m_1) = 0.01, \quad p(d|m_2) = 0.02, \quad p(d|m_3) = 0.04 \quad p(d|m_4) = 0.15\,.$$

Se puede calcular ahora $p(d)$

$$p(d) = p(d|m_1)p(m_1) + p(d|m_2)p(m_2) + p(d|m_3)p(m_3) + p(d|m_4)p(m_4) = 0.077\,.$$

La probabilidad pedida es:

$$p(m_3|d) = \frac{p(m_3 \cap d)}{p(d)} = \frac{p(d|m_3)p(m_3)}{p(d)} = \frac{0.012}{0.077} = 0.155844156$$

## OME 17. Problema 8. Solución

Empezaremos por probar la segunda parte.
Poniendo $a = 2k + 1$ y sustituyendo, se obtiene que el número propuesto se puede escribir como

$$\begin{aligned} N &= 16k^4 + 64k^3 + 116k^2 + 88k + 24 \\ &= 4(4k^4 + 16k^3 + 29k^2 + 22k + 6). \end{aligned}$$

Observando los dos primeros términos de la expresión de $N$ nos podemos dar cuenta de que

$$(4k^2 + 8k + 4)^2 = 16k^4 + 64k^3 + 96k^2 + 64k + 16,$$

así que el problema estará resuelto si conseguimos expresar como suma de dos cuadrados el número

$$20k^2 + 24k + 8.$$

Esto es más sencillo, porque

$$\begin{aligned} 20k^2 + 24k + 8 = 16k^2 + 4k^2 + 16k + 8k + 4 + 4 = \\ = (4k + 2)^2 + (2k + 2)^2, \end{aligned}$$

de manera que en definitiva se tiene

$$N = \Big(4(k^2 + 2k + 1)\Big)^2 + \Big(2(2k + 1)\Big)^2 + \Big(2(k + 1)\Big)^2.$$

## OME 18. Problema 1. Solución

Si designamos por $x$ el número de tebeos de Antonio, el número de tebeos de José será $160 - x$. Deberán existir dos números enteros $\lambda$ y $\mu$ tales que

$$\begin{aligned} x &= 7\lambda + 4 \\ 160 - x &= 8\mu + 4 \end{aligned}$$

de donde

$$160 - 7\lambda - 4 = 8\mu + 4$$

y operando convenientemente resulta

$$7\lambda = 8(19 - \mu).$$

Para que las soluciones de esta última ecuación sean enteras debe haber un número entero $\lambda_1$ tal que se tenga $\lambda = 8\lambda_1$. Sustituyendo y dividiendo la ecuación por 8, resulta ahora

$$7\lambda_1 = 19 - \mu$$

o bien

$$\mu = 19 - 7\lambda_1.$$

Las únicas posibilidades en las que $x$ y $160 - x$ sean ambos positivos son las tres siguientes

| $\lambda_1$ | $\lambda$ | $\mu$ | $x$ | $160 - x$ |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 19 | 4 | 156 |
| 1 | 8 | 12 | 60 | 100 |
| 2 | 16 | 5 | 116 | 44 |

siendo la solución del periódico solamente una de ellas.

## OME 18. Problema 2. Solución

No se contempla que el movimiento sea en el plano o en el espacio. Suponemos que tiene lugar en el plano.

$M$ es un movimiento, pues todo giro de centro $C$ y ángulo $\alpha$ se puede descomponer como producto de dos simetrías axiales (dos rectas que pasan por el centro de giro, y forman un ángulo $\alpha/2$).

No existen rectas fijas. Si las hubiera, el centro de giro debería estar sobre $r$.

En definitiva el resultado final es el producto de tres simetrías axiales respecto a ejes que no se cortan en un mismo punto, que es una simetría axial con deslizamiento (traslación) a lo largo de su eje.

## OME 18. Problema 3. Solución

Llamando $h$ a la altura requerida, podemos considerar, a partir del enunciado, que se tiene

$$h = 120 \cdot \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \cdots\right) = 120 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}.$$

Esta serie numérica es convergente según el *criterio de Leibniz* para series alternadas. Además, el desarrollo en serie de potencias de la función $\ln(1+x)$, convergente para $|x| < 1$, es

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}\, x^n.$$

Aplicando el *teorema del límite de Abel* se tiene entonces

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \lim_{x \to 1^-} \ln(1+x) = \ln 2,$$

luego

$$h = 120 \ln 2.$$

## OME 18. Problema 4. Solución

Puesto que $p(0)=0$, podemos poner $p(\xi)=a_1\xi+a_2\xi^2+\ldots+a_n\xi^n$, con que $a_i\geq 0$ para $i=1,\ldots,n$. Ya que debe ser

$$p\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)\leq x^4+y^4 \quad \text{para todos los } x \text{ e } y \text{ reales,} \tag{1}$$

en particular tomando aquí $y=0$, para todo $x>0$ debe ser

$$a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n\leq x^4,$$

o bien

$$\frac{a_1}{x^3}+\frac{a_2}{x^2}+\frac{a_3}{x}+a_4+a_5x+\ldots+a_nx^{n-4}\leq 1, \tag{2}$$

luego $a_1=a_2=a_3=0$, pues de lo contrario sería $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{p(x)}{x^4}=+\infty$, y existiría un $\xi_0>0$ tal que $p(\xi_0)>\xi_0^4$. También $a_5=\ldots=a_n=0$ pues de lo contrario sería $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{p(x)}{x^4}=+\infty$, y existiría un $\xi_1>0$ tal que $p(\xi_1)>\xi_1^4$. Entonces la inecuación (2) da $a_4\leq 1$.

Pongamos así que sea $p(\xi)=a\xi^4$ con $0\leq a\leq 1$. La desigualdad (1) se reduce a

$$a(x^2+y^2)^2\leq x^4+y^4 \quad \text{para todos los } x \text{ e } y \text{ reales,}$$

o bien, equivalentemente, a

$$a(\xi+\eta)^2\leq \xi^2+\eta^2 \quad \text{para todos los } \xi \text{ y } \eta \text{ reales positivos.}$$

Añadiendo a ambos lados de esta desigualdad el término $2\xi\eta$, reescribámosla como

$$a(\xi+\eta)^2+2\xi\eta\leq(\xi+\eta)^2,$$

o bien

$$2\xi\eta\leq(1-a)(\xi+\eta)^2,$$

o bien, finalmente,

$$\xi\eta\leq 2(1-a)\left(\frac{\xi+\eta}{2}\right)^2. \tag{3}$$

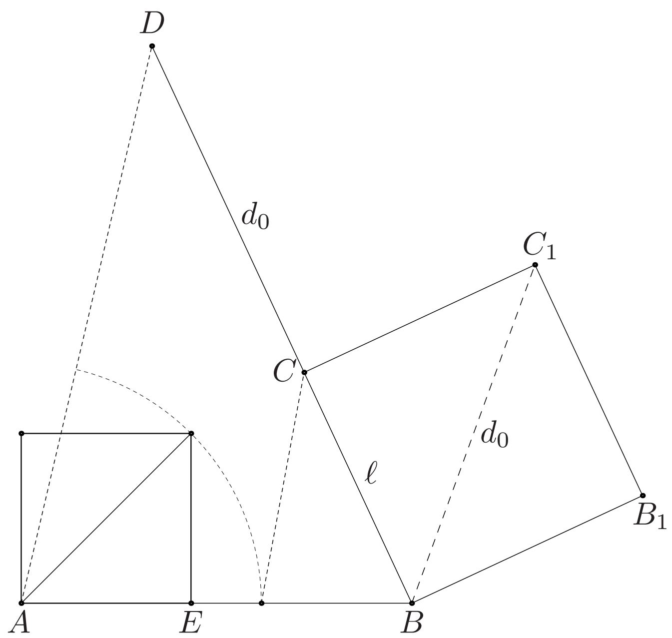
La desigualdad entre las medias geométrica y aritmética de dos números positivos, $\xi\eta\leq\left(\frac{\xi+\eta}{2}\right)^2$ (con igualdad si y sólo si $\xi=\eta$), da que (3) se cumple cuando $1\leq 2(1-a)$, esto es, cuando $a\leq 1/2$. Y que no se cumple cuando $a>1/2$, pues en este caso, al tomar $\xi=\eta$ resulta

$$2(1-a)\left(\frac{\xi+\eta}{2}\right)^2=2(1-a)\xi^2<\xi^2=\xi\eta.$$

Las (únicas) soluciones para el problema son pues los polinomios de la forma $p(\xi)=a\xi^4$ con $0\leq a\leq 1/2$.

## OME 18. Problema 5. Solución

Si la suma de la diagonal y el lado es $r$, se construye un cuadrado y su diagonal de cualquier medida, y después se aplica el teorema de Thales.
Sean $d$, $\ell$ la diagonal y el lado del cuadrado, y sea $AB = d + \ell$ la distancia conocida. Trazamos una recta auxiliar $BD$; sobre ella construimos un cuadrado $BB_1C_1C$ cualquiera y tomamos el punto $D$ tal que $BC_1 = CD$.
Trazamos la recta $AD$ y por el punto $C$ trazamos una recta paralela a la recta $AD$. Esta última recta corta a $AB$ en el punto $E$ tal que $AE = d$ y $EB = \ell$.



## OME 18. Problema 6. Solución

Si $v = 0$ entonces $0 \leq au$ y la desigualdad es cierta. Si $v > 0$, sea $u = \lambda v$ con $\lambda \geq 0$; la desigualdad a probar es

$$\lambda^a v^a v^b \leq \lambda a v + b v,$$

o bien, dado que $a + b = 1$ y $v \neq 0$,

$$\lambda^a \leq \lambda a + 1 - a.$$

Consideremos la función derivable $f(\lambda) = \lambda a + 1 - a - \lambda^a$ para $\lambda \in [0, +\infty)$. Se tiene $f(0) = 1 - a > 0$. La derivada es $f'(\lambda) = a - a\lambda^{a-1}$ y sólo se anula para $\lambda = 1$. Para este valor de $\lambda$, la derivada segunda $f''(\lambda) = -a(a-1)\lambda^{a-2}$ toma el valor $f''(1) = (1-a)a > 0$. Como $f(1) = 0$, $f(\lambda)$ alcanza su valor mínimo absoluto igual a 0 en $\lambda = 1$. Luego $f(\lambda) \geq 0$ para todo $\lambda \geq 0$, como debíamos probar.

**OME 18. Problema 7. Solución**

Sean $a/b$ y $c/d$ dos fracciones con $b$ y $d$ números impares. Entonces su suma

$$\frac{ad + bc}{bd}$$

tiene el denominador impar $bd$ (o un divisor suyo, que será también impar). Igualmente su producto $\dfrac{ac}{bd}$ también tendrá denominador impar. Las inversas de las fracciones de numerador y denominador impar, tienen denominador impar. Las tres contestaciones son pues afirmativas.

**OME 18. Problema 8. Solución**

Si $\mathrm{d}\,(A,B)$ indica la distancia de $A$ a $B$ y $(x,y)$ son las coordenadas de $M$ se tendrá

$$\mathrm{d}\,(MC)=\min\{\sqrt{(x-1)^2+y^2},\sqrt{(x-2)^2+y^2}\}=\begin{cases}\sqrt{(x-1)^2+y^2} & \text{si} \quad x<\frac{3}{2}\\ \sqrt{(x-2)^2+y^2} & \text{si} \quad x\geq\frac{3}{2}\end{cases}$$

$$\mathrm{d}\,(MC')=\min\{\sqrt{x^2+(y-1)^2},\sqrt{x^2+(y-7)^2}\}=\begin{cases}\sqrt{x^2+(y-1)^2} & \text{si} \quad y<4\\ \sqrt{x^2+(y-7)^2} & \text{si} \quad x\geq 4.\end{cases}$$

En el primer caso la igualdad se tiene si $x=\dfrac{3}{2}$, y en el segundo caso si $y=4$.

Así pues, la igualdad se da de la siguiente forma:

Si $x<\dfrac{3}{2}; y<4$ al igualar las distancias obtenemos que $y=x$,

Si $x<\dfrac{3}{2}; y\geq 4$, tenemos $y=\dfrac{x+24}{7}$,

Si $x\geq\dfrac{3}{2}; y<4$, se tiene $y=\dfrac{4x-3}{2}$.

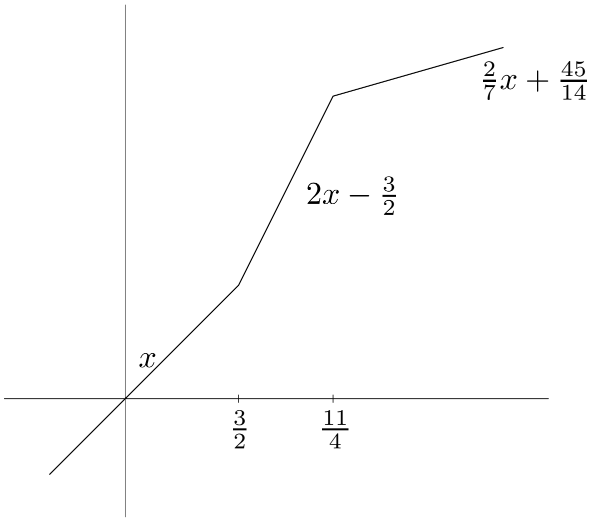
Y por último, si $x\geq\dfrac{3}{2}$; $y\geq 4$ obtenemos $y=\dfrac{4x+45}{14}$.

La segunda parte no sirve, pues la recta que se obtiene no tiene intersección con la región en la que está definida.

Recomponiendo los datos anteriores tenemos que:

$$f(x)=\begin{cases} x & \text{si } x<\dfrac{3}{2},\\[2mm] 2x-\dfrac{3}{2} & \text{si } \dfrac{3}{2}\leq x<\dfrac{11}{4},\\[2mm] \dfrac{2x}{7}+\dfrac{45}{14} & \text{si } x\geq\dfrac{11}{4}.\end{cases}$$

La gráfica es

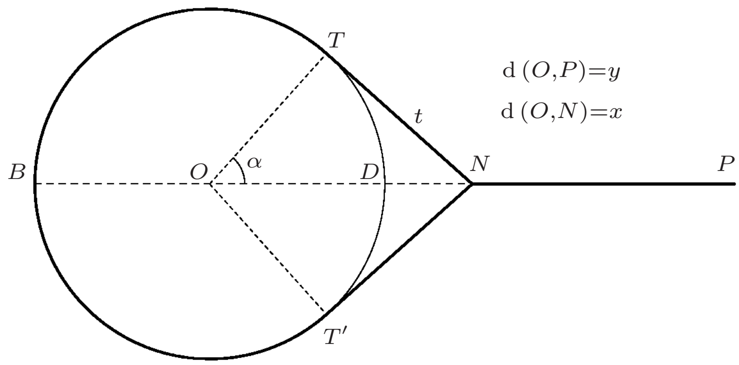



Evidentemente la función no es derivable ni en $x = \frac{3}{2}$ ni en $x = \frac{11}{4}$, pues su derivada es:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x < \frac{3}{2}, \\ 2 & \text{si } \frac{3}{2} < x < \frac{11}{4}, \\ \frac{2}{7} & \text{si } x > \frac{11}{4}. \end{cases}$$

## OME 19. Problema 1. Solución

Sea $\ell$ la longitud total de la cuerda y $t$ la longitud de las tangentes.




Se tiene

$$\ell = y - x + 2t + \widehat{T'BT} = y - x + 2t + 2\pi r - \widehat{T'T} \;\Rightarrow\; y = \ell + x - 2t - 2\pi r + \widehat{T'T}.$$

Expresando $x$, $t$ y el arco $\widehat{T'DT}$ en función del ángulo $\alpha$, resulta:

$$\frac{OT}{x} = \cos\alpha \;\Rightarrow\; x = \frac{r}{\cos\alpha}; \qquad \frac{t}{r} = \tan\alpha \;\Rightarrow\; t = r\tan\alpha$$

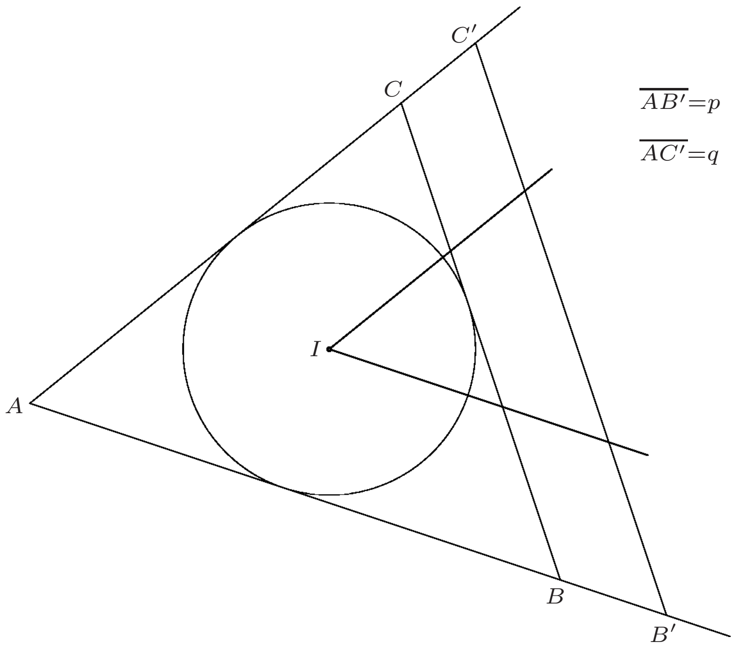
El arco $TT'$ mide $2r\alpha$, y por tanto $y = f(\alpha) = \ell + \dfrac{r}{\cos\alpha} - 2r\tan\alpha - 2\pi r + 2\alpha r$.
La cuerda se rompe cuando el punto $P$ está lo más alejado posible de $C$, es decir, cuando $f(\alpha)$ es máxima.

$$f'(\alpha) = \frac{r\,\mathrm{sen}\,\alpha}{\cos^2\alpha} - \frac{2r}{\cos^2\alpha} + 2r$$

$f'(\alpha) = 0 \;\Leftrightarrow\; \mathrm{sen}\,\alpha\,(1 - 2\mathrm{sen}\,\alpha) = 0.$
El máximo se alcanza en $\alpha = \dfrac{\pi}{6}$, y por tanto $x = \dfrac{2r}{\sqrt{3}} = \dfrac{2r\sqrt{3}}{3}$.

*Observación.* Una simple consideración física permite resolver más fácilmente el problema. Si el nudo no produce fuerzas de rozamiento, la tensión a lo largo de la cuerda es la misma en todos los puntos. En particular, en el punto $N$ tenemos tres fuerzas de igual módulo que deben sumar 0. Esta condición obliga a que formen ángulos de $120°$. Se deduce que $\widehat{TNO} = 60°$ y que $\alpha = 30°$.

## OME 19. Problema 2. Solución




Dado el ángulo, se trazan paralelas a sus lados a una distancia igual al radio $r$ de la circunferencia inscrita. Su punto de corte es el incentro $I$. Con centro en $I$ y radio $r$ se traza la circunferencia inscrita. Si la razón de los lados es $\frac{p}{q}$, sobre los lados del ángulo a partir del vértice, se toman las distancias $p$ y $q$ determinando el triángulo $AB'C'$. Se traza ahora la recta paralela a $B'C'$, tangente a la circunferencia inscrita que deja en el mismo semiplano a $A$ y a la circunferencia inscrita.

## OME 19. Problema 3. Solución

*Primera solución*

$$M_n = \frac{r}{n}(r\,\text{sen}\,\frac{\pi}{n+1} + r\,\text{sen}\,\frac{2\pi}{n+1} + \cdots + r\,\text{sen}\,\frac{n\pi}{n+1})$$

$$\lim_{n\to\infty} M_n = r^2 \lim_{n\to\infty} \frac{\text{sen}\,\frac{\pi}{n+1} + \text{sen}\,\frac{2\pi}{n+1} + \cdots + \text{sen}\,\frac{n\pi}{n+1}}{n+1} =$$

$$= \frac{r^2}{\pi} \lim_{n\to\infty} \frac{\text{sen}\,\frac{\pi}{n+1} + \text{sen}\,\frac{2\pi}{n+1} + \cdots + \text{sen}\,\frac{n\pi}{n+1}}{\frac{n+1}{\pi}} = \frac{r^2}{\pi}\int_0^\pi \text{sen}\,x\,dx = \frac{2r^2}{\pi}$$

*Segunda solución*

Sean $P_1, \ldots, P_n$ los puntos de división de la semicircunferencia, en sentido antihorario. Uniéndolos con el centro de la semicircunferencia se forman los ángulos centrales

$$t_1 = \frac{\pi}{n+1},\ t_2 = \frac{2\pi}{n+1},\ \ldots,\ t_k = \frac{k\pi}{n+1},\ \ldots,\ t_n = \frac{n\pi}{n+1}.$$

El área es $A_k = r^2\,\text{sen}\,\frac{k\pi}{n+1}$, así que debemos calcular

$$\lim_{n\to\infty} \frac{A_1 + A_2 + \ldots + A_n}{n}.$$

En primer lugar vamos a calcular la suma

$$\text{sen}\,\frac{\pi}{n+1} + \ldots + \text{sen}\,\frac{n\pi}{n+1}. \tag{1}$$

Para ello consideramos los números complejos

$$\begin{aligned} u &= \cos t + i\,\text{sen}\,t \\ u^2 &= \cos 2t + i\,\text{sen}\,2t \\ &\cdots \\ u^n &= \cos nt + i\,\text{sen}\,nt, \end{aligned}$$

donde para escribir los segundos miembros hemos utilizado la fórmula de De Moivre. Entonces, sumando obtenemos

$$u + u^2 + \ldots + u^n = (\cos t + \cos 2t + \cdots + \cos nt) + i\,(\text{sen}\,t + \text{sen}\,2t + \cdots + \text{sen}\,nt)$$

así que la suma que buscamos (de senos de ángulos en progresión aritmética) es la parte imaginaria del número complejo del primer miembro, que por tratarse de una suma de términos de una progresión geométrica se puede escribir

$$\frac{u(u^n-1)}{u-1} = \frac{(\cos t + i\,\mathrm{sen}\, t)(\cos nt + i\,\mathrm{sen}\, nt - 1)}{\cos t + i\,\mathrm{sen}\, t - 1} =$$
$$= \frac{(\cos t + i\,\mathrm{sen}\, t)(\cos nt + i\,\mathrm{sen}\, nt - 1)(\cos t - 1 - i\,\mathrm{sen}\, t)}{(\cos t - 1)^2 + \mathrm{sen}^2 t}$$

El denominador de esta última fracción es $2(1-\cos t) = 4\mathrm{sen}^2\dfrac{t}{2}$.
Por su parte, del numerador sólo nos interesa la parte imaginaria, que es

$$\begin{aligned}
&\mathrm{sen}\, nt - \cos t\, \mathrm{sen}\, nt - \mathrm{sen}\, t\, \cos nt + \mathrm{sen}\, t = \\
&= \mathrm{sen}\, nt + \mathrm{sen}\, t - (\mathrm{sen}\, nt\, \cos t + \cos nt\, \mathrm{sen}\, t) = \\
&= 2\,\mathrm{sen}\,\frac{(n+1)\,t}{2}\,\cos\frac{(n-1)\,t}{2} - \mathrm{sen}\,(n+1)\,t = \\
&= 2\,\mathrm{sen}\,\frac{(n+1)\,t}{2}\cos\frac{(n-1)\,t}{2} - 2\,\mathrm{sen}\,\frac{(n+1)\,t}{2}\cos\frac{(n+1)\,t}{2} = \\
&= 2\,\mathrm{sen}\,\frac{(n+1)\,t}{2}\left(\cos\frac{(n-1)\,t}{2} - \cos\frac{(n+1)\,t}{2}\right) = \\
&= 2\,\mathrm{sen}\,\frac{(n+1)\,t}{2}\left[-2\,\mathrm{sen}\,\frac{nt}{2}\,\mathrm{sen}\,\left(-\frac{t}{2}\right)\right] = 4\,\mathrm{sen}\,\frac{(n+1)\,t}{2}\,\mathrm{sen}\,\frac{nt}{2}\,\mathrm{sen}\,\frac{t}{2}
\end{aligned}$$

En definitiva queda

$$\frac{\mathrm{sen}\,\dfrac{(n+1)\,t}{2}\,\mathrm{sen}\,\dfrac{nt}{2}}{\mathrm{sen}\,\dfrac{t}{2}},$$

y poniendo $t = \frac{\pi}{n+1}$, se trata de calcular el límite

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\mathrm{sen}\,\dfrac{(n+1)\,\pi}{2(n+1)}\,\mathrm{sen}\,\dfrac{n\,\pi}{2(n+1)}}{n\,\mathrm{sen}\,\dfrac{\pi}{2(n+1)}}.$$

En el numerador, el primer factor es $\mathrm{sen}\,\frac{\pi}{2} = 1$; el segundo factor tiene límite 1, porque $\lim_{n\to\infty} n/(n+1) = 1$ y, de nuevo, $\mathrm{sen}\,\pi/2 = 1$.
Para calcular el límite del denominador, como $\frac{\pi}{2(n+1)}$ tiende a cero cuando $n$ tiende a infinito, sustituimos el seno por el arco, con lo cual debemos hallar el límite

$$\lim_{n\to\infty} n\,\frac{\pi}{2(n+1)} = \frac{\pi}{2},$$

así que

$$\lim_{n\to\infty}\frac{A_1 + A_2 + \cdots + A_n}{n} = \frac{2\,r^2}{\pi}.$$

## OME 19. Problema 4. Solución

Sea $f(x) = 16x^5 - 20x^3 + 5x = x(16x^4 - 20x^2 + 5)$.
Si $f(x) = 0$, tenemos que $x = 0$ y que $16x^4 - 20x^2 + 5 = 0$ lo que nos proporciona $x = \pm\sqrt{\dfrac{5+\sqrt{5}}{8}}$ y $x = \pm\sqrt{\dfrac{5-\sqrt{5}}{8}}$.
Entonces $f'(x) = 80x^4 - 60x^2 + 5$ y si $f'(x) = 0$ debe ser $x = \pm\sqrt{\dfrac{3\pm\sqrt{5}}{8}}$; el mínimo se alcanza en $x = \sqrt{\dfrac{3+\sqrt{5}}{8}}$ y en $x = -\sqrt{\dfrac{3-\sqrt{5}}{8}}$, y en los otros dos puntos se alcanza el máximo , $x = -\sqrt{\dfrac{3+\sqrt{5}}{8}}$ y en $x = \sqrt{\dfrac{3-\sqrt{5}}{8}}$.
Pero además

$$f\left(-\sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{8}}\right) = f\left(\sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{8}}\right) = -1 \quad \text{y} \quad f\left(\sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{8}}\right) = f\left(-\sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{8}}\right) = 1.$$

Finalmente:
Si $-1 < m < 1$ se tienen 5 raíces reales.
Si $m = \pm 1$ hay tres raíces reales.
Si $m > 1$ o $m < -1$ hay una raíz real.

**OME 19. Problema 5. Solución**

Inmediatamente se comprueba que $a = 4$.
En un giro de centro $B$ y amplitud 90°, la recta $x = 0$ se transforma, dependiendo del sentido de giro, en $y = 4$ o en $y = -4$. Las posibles posiciones de $A$ están dadas por la intersección de estas dos rectas con $y = 2x + 6$.
En el primer caso se trata del punto $A_1(-1, 4)$. La perpendicular a $A_1B$ por $B$ corta al eje $x = 0$ en el punto $(0, -5)$, que es $C_1$. Con esto, el cuarto vértice es $D_1(-5, -1)$.
En el segundo caso, el punto $A_2$, intersección de $y = 2x + 6$ con $y = -4$ es

$$A_2(-5, -4);$$

El punto $C_2$ se calcula de la misma manera que antes, dando $C_2(0, 9)$, y finalmente, $D_2(-9, 5)$.

## OME 19. Problema 6. Solución

Llamaremos $\ell$ al precio de un vaso de limonada, $s$ el precio de un sandwich y $b$ al precio de un bizcocho. Nos preguntamos por el precio de $\ell + s + b$, y por el precio de $2\ell + 3s + 5b$ sabiendo que $\ell + 3s + 7b = 14$ y que $\ell + 4s + 10b = 17$. Restando estas dos igualdades tenemos que $s + 3b = 3$.

Es decir $\ell + s + b = \ell + 3s + 7b - 2s - 6b = 14 - 6 = 8$ y además tenemos que $2\ell + 3s + 5b = 2(\ell + s + b) + s + 3b = 16 + 3 = 19$.

## OME 19. Problema 7. Solución

Supondremos que la unidad de longitud de la arista es el cm; para simplificar los cálculos daremos las medidas en dm. Además, por "área de la superficie libre de agua" entenderemos el área del triángulo equilátero formado por la capa superior de agua dentro del tetraedro.
Primero resolveremos el problema sin datos numéricos (pero midiendo todas las longitudes en dm).
Entonces tenemos:
Si $b$ es la arista del tetraedro, $V$ su volumen, y $x$ es la arista del tetraedro libre de agua, se tiene

$$\left(\frac{x}{b}\right)^3 = \frac{V-2}{V}, \text{ de donde } \ x = b\sqrt[3]{\frac{V-2}{V}}.$$

Llamando $S_b$ al área de la base del tetraedro de arista $b$ y $S_x$ a la del de arista $x$, se cumple también

$$\frac{S_x}{S_b} = \left(\frac{x}{b}\right)^2, \text{ luego } \ S_x = \frac{x^2 \cdot S_b}{b^2}.$$

Por último, la altura que alcanza el agua es la diferencia entre las alturas de los dos tetraedros, $h_b$ y $h_x$, de modo que

$$\frac{b}{x} = \frac{h_b}{h_x}, \text{ es decir, } \ \frac{b-x}{x} = \frac{h_b - h_x}{h_x},$$

y por lo tanto

$$h_b - h_x = \frac{h_x(b-x)}{x}.$$

El área de la base de un tetraedro de arista $b$ es

$$S_b = \frac{b^2\sqrt{3}}{4};$$

y su altura,

$$h_b = \frac{b\sqrt{6}}{3}.$$

Por tanto, su volumen es

$$V = \frac{b^3\sqrt{2}}{12}.$$

En nuestro caso, $b = 3$ dm, así que $V = \dfrac{9}{4}\sqrt{2} > 2$, y $V - 2 = \dfrac{9\sqrt{2}-8}{4}$.

Como

$$S_x = \frac{\sqrt{3}}{4} b^2 \cdot \sqrt[3]{\left(\frac{V-2}{V}\right)^2},$$

poniendo $x = 3$ resulta

$$S_x = \frac{9\sqrt{3}}{4} \cdot \sqrt[3]{\left(\frac{9-4\sqrt{2}}{9}\right)^2}.$$

Por su parte,

$$h_b - h_x = \sqrt{6} \cdot \sqrt[3]{\frac{9-4\sqrt{2}}{9}} \left(1 - \sqrt[3]{\frac{9-4\sqrt{2}}{9}}\right).$$

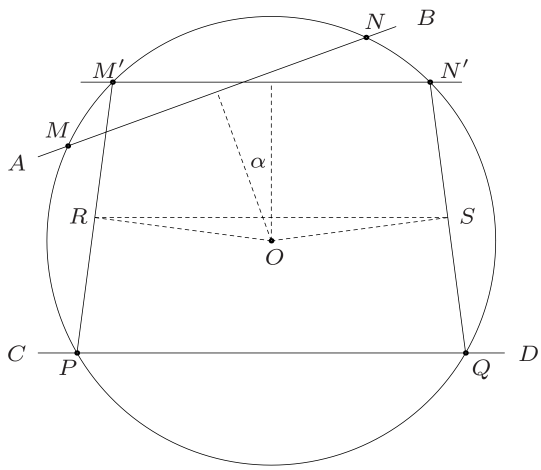
**OME 19. Problema 8. Solución**

| | 1960 | $1960+d$ | $1960+\frac{2}{3}(x+y+z)$ | $1960+4z$ |
|---|---|---|---|---|
| edad del hermano mayor | $x$ | $x+d$ | $x+\frac{2}{3}(x+y+z)$ | $x+4z$ |
| edad del hermano medio | $y$ | $y+d$ | $y+\frac{2}{3}(x+y+z)$ | $y+4z$ |
| edad del hermano menor | $z$ | $z+d$ | $z+\frac{2}{3}(x+y+z)$ | $z+4z$ |

Tenemos $x = y + z$. Si $2(x + d) = y + d + z + d$, entonces $2x = y + z$, y como $x = y + z$ resulta $x = 0$, luego, $2(y + d) = x + d + z + d$ implica $2y = x + z$, y como $x = y + z$, resulta $y = 2z, x = 3z$.
Además $\dfrac{2}{3}(x + y + z) = 4z$ y como $x + 4z = 21$, queda $7z = 21$, de donde $z = 3$
De $z = 3$ sale $x = 9$ y $y = 6$, y por tanto las edades son $21, 18, 15$.

OME 20. Problema 1. Solución

Sean $AB$ y $CD$ las trayectorias rectilíneas seguidas por los tanques. Supongamos el problema resuelto y $MN + PQ = \ell$ ($MN$ sobre $AB$ y $PL$ sobre $CD$).




Girando la recta $AB$, con centro $O$ el ángulo que forman las rectas $AB$ y $CD$, se tiene la recta $A'B'$ y la figura $PM'N'Q$, ($M'N' = MN$) es un trapecio; la paralela media $RS$ medirá

$$\frac{1}{2}(PQ + M'N') = \frac{1}{2}(PQ + MN) = \frac{l}{2}.$$

Por otra parte $P$ y $M'$ equidistan de $O$, luego $RO$ es la mediatriz de $M'P$ y análogamente $SO$ lo es de $N'Q$.
La construcción resulta evidente: se gira $AB$ para que sea paralela a $CD$, se dibuja una recta equidistante de ambas y se traza la perpendicular por $O$; a partir del punto de intersección se toman a un lado y a otro dos segmentos de longitud $\dfrac{l}{4}$, hallándose los puntos $R$ y $S$. Las perpendiculares a $RO$ por $R$ y a $SO$ por $S$, cortan, respectivamente, a $A'B'$ y a $CD$ en $M'$ y $N'$ y en $P$ y $Q$. La distancia de $O$ a cualquiera de estos puntos (radio del círculo circunscrito al trapecio $PM'N'Q$) es el alcance del cañón.

**OME 20. Problema 2. Solución**

La forma más simple de resolver el problema es tratar de encontrar un número `abcde` tal que $\texttt{abcde} \cdot \texttt{abcde} = \ldots\texttt{abcde}$, los posibles valores para $\texttt{e}$ son $0, 1, 5$ o $6$. Si $\texttt{e} = 0$ tendríamos el número 00000; si $\texttt{e} = 1$ tenemos la solución 00001.
Si $\texttt{e} = 5$, entonces $\texttt{d} = 2$ y como $10\texttt{c}+6$ termina en $\texttt{c}$, entonces $\texttt{c} = 6$. Para obtener $\texttt{b}$ tenemos que $(\texttt{a}0000+\texttt{b}625)\cdot(\texttt{a}0000+\texttt{b}625) = \ldots\texttt{b}625$, lo que nos dice que $10\texttt{b}+10$ termina en $\texttt{b}$, con lo cual $\texttt{b} = 0$. Finalmente $\texttt{a}0625 \cdot \texttt{a}0625 = \texttt{a}0625$, con lo cual $10\texttt{a}+9$ termina en 9 y por lo tanto $\texttt{a} = 9$. Entonces el número solución es:

$$90625^2 = 821890625.$$

Si $\texttt{e} = 6$, siguiendo el mismo procedimiento se obtiene que:

$$09376^2 = 87909376.$$

## OME 20. Problema 3. Solución

1) Como $x > 0, y > 0$ existen $\sqrt{x}$ y $\sqrt{y}$ tales que

$$(\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 \geq 0; \quad x + y - 2\sqrt{xy} \geq 0, \quad \text{de donde:} \quad \frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy}\,.$$

2) Si $\dfrac{x^2+y^2}{2} \geq \left(\dfrac{x+y}{2}\right)^2$, es cierto, haciendo operaciones se llega a la fórmula evidente $x^2 + y^2 - 2xy \geq 0$. Desarrollando los pasos al revés tendríamos el resultado.

3) Como $p + q = 1$, tenemos que $p \cdot q \leq \dfrac{1}{4}$ (el máximo del producto se obtiene cuando ambos son iguales).
En este caso: $p + \dfrac{1}{p} + q + \dfrac{1}{q} = p + q + \dfrac{p+q}{pq} = 1 + \dfrac{1}{pq} \geq 5$, lo que equivale a

$$\left(p + \frac{1}{p}\right)^2 + \left(q + \frac{1}{q}\right)^2 \geq 25 - 2\left(p + \frac{1}{p}\right) \cdot \left(q + \frac{1}{q}\right)$$

Pero

$$\left[\left(p + \frac{1}{p}\right) - \left(q + \frac{1}{q}\right)\right]^2 \geq 0 \implies \left(p + \frac{1}{p}\right)^2 + \left(q + \frac{1}{q}\right)^2 \geq 2\left(p + \frac{1}{p}\right) \cdot \left(q + \frac{1}{q}\right).$$

Y sumando estas dos desigualdades se obtiene

$$\left(p + \frac{1}{p}\right)^2 + \left(q + \frac{1}{q}\right)^2 \geq \frac{25}{2}\,.$$

## OME 20. Problema 4. Solución

Puesto que se cumple

$$\begin{aligned}\operatorname{sen} x &= 2\operatorname{sen}\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} = \\ &= 2^2\operatorname{sen}\frac{x}{2^2}\cos\frac{x}{2^2}\cos\frac{x}{2} = \\ &= \cdots \\ &= 2^n\operatorname{sen}\frac{x}{2^n}\cos\frac{x}{2^n}\cos\frac{x}{2^{n-1}}\cdots\cos\frac{x}{2},\end{aligned}$$

y también que

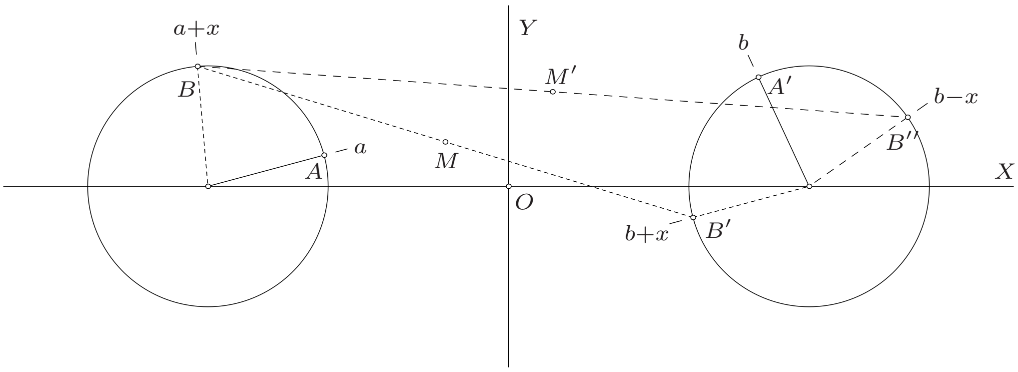
$$\lim_{n\to\infty} 2^n\operatorname{sen}\frac{x}{2^n} = x,$$

porque $\operatorname{sen}\frac{x}{2^n}$ es equivalente a $\frac{x}{2^n}$, el límite pedido es

$$\lim_{n\to\infty}\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2^2}\cos\frac{x}{2^3}\cdots\cos\frac{x}{2^n} = \frac{\operatorname{sen} x}{x}.$$

## OME 20. Problema 5. Solución

Podemos suponer sin pérdida de generalidad que el radio de las circunferencias dadas es 1. Tomando unos ejes con origen en el punto medio $O$ de los centros de las circunferencias, eje $OX$ la recta que los une y llamando $2d$ a la distancia entre los centros, tenemos para el caso a)




$$A = (-d + \cos a,\ \operatorname{sen} a); \quad A' = (d + \cos b,\ \operatorname{sen} b)$$
$$B = \big( -d + \cos(a + x),\ \operatorname{sen}(a + x)\big); \quad B' = \big(d + \cos(b + x),\ \operatorname{sen}(b + x)\big)$$

y para el punto medio $M$ del segmento $BB'$

$$M_x = \frac{1}{2}\big(\cos(a + x) + \cos(b + x)\big)$$
$$M_y = \frac{1}{2}\big(\operatorname{sen}(a + x) + \operatorname{sen}(b + x)\big)$$

para eliminar $x$, elevando al cuadrado y sumando queda

$$M_x^2 + M_y^2 = \frac{1}{4}\Big(1 + 1 + 2\cos(a + x)\cos(b + x) + 2\operatorname{sen}(a + x)\operatorname{sen}(b + x)\Big) = \frac{1}{2}\Big(1 + \cos\big((a + x) - (b + x)\big)\Big) = \frac{1}{2}\Big(1 + \cos(a - b)\Big)$$

como $a$ y $b$ son fijos, el lugar de $M$ es una circunferencia de centro el origen y radio

$$\sqrt{\frac{1}{2}\Big(1 + \cos(a - b)\Big)}.$$

Para el caso b) basta cambiar $x$ por $-x$ en las coordenadas de $B'$ resultando para el nuevo punto medio $M'$

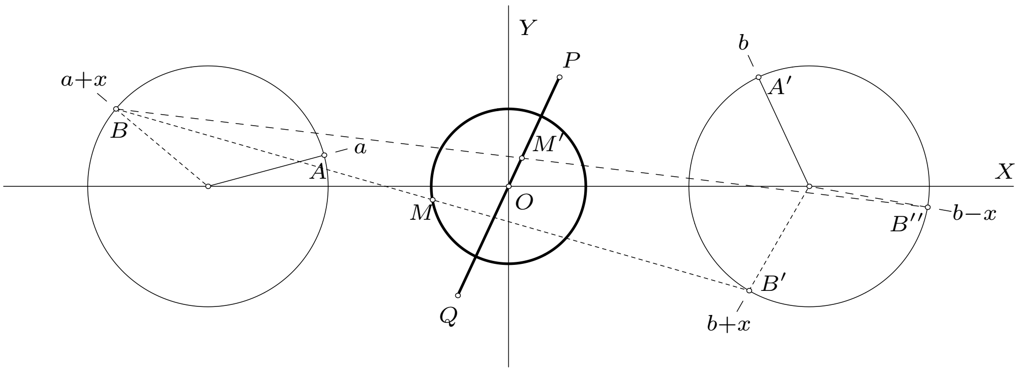
$$M_x = \frac{1}{2}\big(\cos(a+x) + \cos(b-x)\big)$$
$$M_y = \frac{1}{2}\big(\operatorname{sen}(a+x) + \operatorname{sen}(b-x)\big)$$

y operando,

$$\left.\begin{array}{l} M'_x = \frac{1}{2}2\cos\frac{(a+b)}{2}\cos x \\ M'_y = \frac{1}{2}2\operatorname{sen}\frac{(a+b)}{2}\cos x \end{array}\right\} \Rightarrow \overrightarrow{OM'} = \cos x\left(\cos\frac{a+b}{2}, \operatorname{sen}\frac{a+b}{2}\right)$$

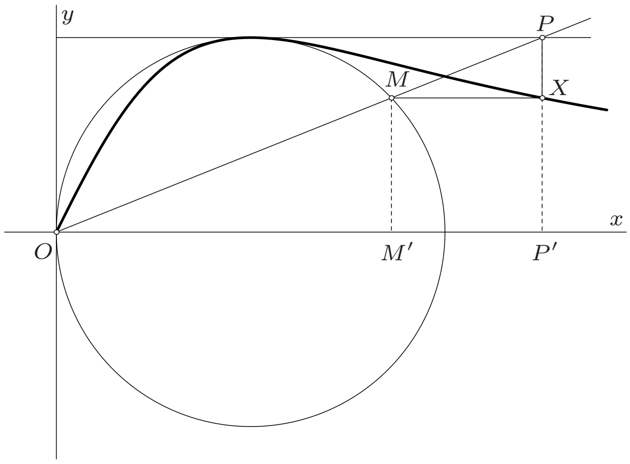
es decir, el lugar de $M'$ es el segmento de extremos $P\left(\cos\dfrac{a+b}{2}, \operatorname{sen}\dfrac{a+b}{2}\right)$ y $Q$, simétrico de $P$ respecto del origen.

La figura siguiente muestra ambos lugares en trazo grueso.



**OME 20. Problema 6. Solución**

Consideramos la circunferencia $\gamma$ y la recta $r$. Sea $t$ el ángulo que la recta variable forma con $OX$. Se tiene que




$OM = 6\cos t$, $MM' = 6\cos t \operatorname{sen} t = 3\operatorname{sen} 2t$; $OP' = \dfrac{3}{\tan t}$. Las coordenadas del punto son $X = \left(\dfrac{3}{\tan t}, 3\operatorname{sen} 2t\right)$, que son las ecuaciones paramétricas del lugar. Eliminando $t$ tenemos

$$y = \frac{18x}{x^2+9}$$

que es la ecuación cartesiana del lugar.

## OME 20. Problema 7. Solución

a) Escribimos el número en la forma $10^p a + x$, donde $x$ es el número de $p$ cifras que resulta de suprimir las primeras. Del enunciado se obtiene $10^p a + x = 5x$, es decir, $x = \dfrac{10^p a}{4}$. Como $x$ tiene $p$ cifras, se cumple $x < 10^p$, luego $a < 4$, de manera que la primera cifra $a$ puede ser 1, 2 o 3. El menor número es el 25, que se obtiene para $p = 1$ y $a = 2$. Los demás números con esta propiedad tienen la forma $125a \cdot 10^{p-2}$, con $p \geq 2$ y $a = 1, 2, 3$.

b) En este caso, $10^p a + x = 12x$, de donde $x = \dfrac{10^p a}{11}$; pero este número no puede ser entero ya que $a$ es un entero comprendido entre 1 y 9.

c) De la misma forma, $10^p a + x = kx$, donde $1 \leq a \leq 9$, y resulta $x = \dfrac{10^p a}{k-1}$, con $a < k - 1$, o bien

$$\frac{a}{k-1} = \frac{x}{10^p}.$$

Esta fórmula permite formular el siguiente criterio general: El número $abc \ldots h_{(10}$ queda dividido por $k$ al suprimir la primera cifra (es decir, la cifra $a$), si y sólo si la división de $a$ por $k - 1$ da el decimal exacto $0.bc \ldots h$ en base 10.

En particular, el denominador de la fracción irreducible correspondiente a la fracción $\dfrac{a}{k-1}$ sólo puede tener los factores primos 2 y 5.

Por ejemplo, el entero 31875 queda dividido por 17 al suprimir el 3, pues $3/16 = 0.1875$.

**OME 20. Problema 8. Solución**

Consideremos el polinomio de grado 5 que se obtiene al desarrollar el determinante

$$P(x) = \begin{vmatrix} x^3+3x & 2 & 1 & 0 \\ x^2+5x & 3 & 0 & 2 \\ x^4+x^2+1 & 2 & 1 & 3 \\ x^5+1 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}.$$

Si hacemos la división por $x^2-1$ podemos escribir
$P(x) = (x^2-1)C(x) + ax + b$, siendo $C(x)$ el polinomio cociente, y $ax+b$ el resto. Dando valores a $x$ sale
$P(1) = a+b$ y $P(-1) = -a+b$. Calculamos $P(1) = 15$ y $P(-1) = -69$; resolvemos el sistema y tenemos que $b = -27$ y $a = 42$. Por lo tanto el resto es

$$42x - 27.$$

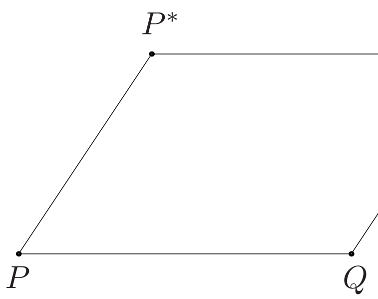
**OME 21. Problema 1. Solución**

Vamos a denotar por $(PQ)$ la recta determinada por dos puntos distintos $P$ y $Q$, y abreviaremos $f(P)$ por $P^*$. De acuerdo con la condición (a), ($f$ es inyectiva), $P \neq Q \Rightarrow P^* \neq Q^*$, y de acuerdo con la condición (b) se tiene, cuando $P \neq Q$ que $f\big((PQ)\big) = (P^*Q^*)$. Se puede señalar que la condición de ser $f$ suprayectiva es superflua cumpliéndose las demás, pues suponiendo que haya un punto $P$ sin preimagen, debe ser $P^* \neq P$, y entonces por la condición (c) se deduce que la recta $f\big((PP^*)\big)$ coincide con $(PP^*)$ (ya que comparte con ella el punto $P^*$), luego, usando (b), el punto $P$ ha de tener preimagen, contra lo supuesto. Por otra parte, cuando sea $P^* = P$ diremos que $P$ es un *punto fijo* de $f$. Atendiendo al número de puntos fijos de $f$, los tres lemas siguientes cubren todas las posibilidades:

**Lema 1**.– Si $f$ no tiene ningún punto fijo, es una *traslación* de vector no nulo.

Demostración.– Fijemos en nuestra consideración un punto arbitrario $P$. Por hipótesis es $P^* \neq P$ y así $\overrightarrow{PP^*} \neq \vec{0}$.

Sea ahora $Q \neq P$. En primer lugar, si $Q \notin (PP^*)$, aplicando además la hipótesis ($Q^* \neq Q$) y la condición (c), la recta $(P^*Q^*)$ es paralela pero no coincidente con $(PQ)$. Si $(PP^*)$ y $(QQ^*)$ se cortasen en un punto $O$, se tendría $O^* = O$ (pues como entonces $P^* \in (OP) \cap (O^*P^*)$ y $(OP)$ debe ser paralela o coincidente con $(O^*P^*)$, se sigue que estas dos rectas son coincidentes, luego $O^* \in (OP)$; y de igual modo $O^* \in (OQ)$, así que $O^* = (OP) \cap (OQ) = O$), contra la hipótesis. Luego las rectas $(PP^*)$ y $(QQ^*)$ son paralelas y no coincidentes y se tiene $\overrightarrow{QQ^*} = \overrightarrow{PP^*}$.

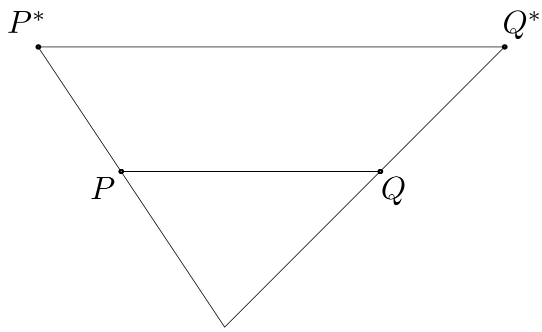



En segundo lugar, si $Q \in (PP^*)$, podemos siempre considerar otro punto $R \notin (PQ)$; aplicando dos veces la argumentación anterior, para el punto $Q \notin (RR^*)$ y para el punto $R \notin (PP^*)$, se obtiene $\overrightarrow{QQ^*} = \overrightarrow{RR^*} = \overrightarrow{PP^*}$, y el lema queda probado.

**Lema 2**.– Si $f$ tiene exactamente un punto fijo $O$, es una *homotecia* de centro $O$ y razón $k \neq 1$.

*Demostración*.– Sea $P \neq O$ un punto arbitrario que fijamos en nuestra consideración; como $O^* = O$, es $(O^*P^*) = (OP^*)$ y, usando (c), se tiene que $(OP^*)$ coincide con $(OP)$, luego $P^* \in (OP)$. Además es $P^* \neq P$ por hipótesis. Sea entonces $k = \dfrac{\overline{OP^*}}{\overline{OP}} \neq 1$ (consideramos estas distancias orientadas desde $O$).

Y ahora sea en primer lugar $Q \notin (OP)$; por el mismo razonamiento anterior se tiene que $Q^* \in (OQ)$ y, según (c), la recta $(P^*Q^*)$ es paralela pero no coincidente con $(PQ)$. Aplicando el teorema de Thales se obtiene $\dfrac{\overline{OQ^*}}{\overline{OQ}} = \dfrac{\overline{OP^*}}{\overline{OP}} = k$.




En segundo lugar, si $Q \in (OP)$ y $Q \neq O$, considerando otro punto $R \notin (OP)$ y aplicando dos veces lo ya demostrado, se tiene

$$\frac{\overline{OR^*}}{\overline{OR}} = \frac{\overline{OP^*}}{\overline{OP}} \qquad \text{y} \qquad \frac{\overline{OQ^*}}{\overline{OQ}} = \frac{\overline{OR^*}}{\overline{OR}},$$

luego también en este caso es $\dfrac{\overline{OQ^*}}{\overline{OQ}} = \dfrac{\overline{OP^*}}{\overline{OP}} = k$.

**Lema 3**.– Si $f$ tiene más de un punto fijo, entonces todos los puntos del plano son fijos y $f$ es la transformación *identidad*.
*Demostración*.– Supongamos que $P$ y $Q$ son dos puntos distintos y fijos por $f$. Sea $R$ un punto cualquiera diferente de esos dos. En primer lugar, si $R \notin (PQ)$, aplicando (c) se obtiene

$$(P^*R^*) = (PR^*) = (PR)$$

y

$$(Q^*R^*) = (QR^*) = (QR).$$

Pero entonces $R = (PR) \cap (QR) = (P^*R^*) \cap (Q^*R^*) = R^*$, de modo que $R$ es un punto fijo de $f$.
En segundo lugar, si $R \in (PQ)$, se considera otro punto $S \notin (PQ)$ para el cual, por la misma argumentación anterior, se tendrá $S^* = S$. Ahora bien, según (c) es $R^* \in (SR)$ y según (b) es $R^* \in (P^*Q^*) = (PQ)$, luego $R^* = (SR) \cap (PQ) = R$, y también en este caso $R$ es punto fijo de $f$.

# OME 21. Problema 2. Solución

Cualquier recta que pase por el origen determina dos semiplanos. Si la recta tiene pendiente racional, contiene puntos de coordenadas enteras distintos del origen. Si la pendiente es irracional, solamente contiene al origen.

Como ejemplos de conjuntos $E$ pueden tomarse los puntos de coordenadas enteras de cada uno de los semiplanos determinados por tales rectas. En el caso de que la recta separadora tenga pendiente racional, debe elegirse una semirecta de ella desde el origen como parte de $E$ y la otra semirecta como parte de $-E$.

Dado un irracional cualquiera $k$, los conjuntos

$$E = \{(x, y) |\, x < ky\} \cup \{0\}$$

o bien

$$E' = \{(x, y) |\, x > ky\} \cup \{0\}$$

cumplen trivialmente todo lo pedido en el enunciado.

Dado un racional cualquiera $k$, los conjuntos del tipo

$$E = \{(x, y) |\, x < ky\} \cup \{(x, y) |\, y > 0 \wedge x = ky\} \cup \{0\}$$

tambien cumplen las condiciones.

Se puede demostrar que los conjuntos $E$ antes descritos son los únicos que cumplen las condiciones del enunciado. (Solución de Víctor González Alonso).

1) En primer lugar demostraremos que $-E$ cumple las mismas propiedades que $E$. El hecho de que un par $(x, y)$ es de $-E$ si y sólo si su opuesto es de $E$ se desprende de las propiedades de $E$, y $-E$ es cerrado por la suma, porque de no serlo, existirían dos pares de $-E$ que sumados estarían en $E$, pero tomando los opuestos (que serán de $E$), su suma (que será la opuesta de la que habíamos obtenido) también sería de $E$ lo que contradice el hecho de que $E$ no contiene simultáneamente un par y su opuesto.

2) El siguiente paso es demostrar que si $(x, y) \in E$, todos los puntos de la semirrecta que pasa por él y sale del origen (es decir, los puntos $(x', y')$ del mismo cuadrante que $(x, y)$ tales que $\frac{y}{x} = \frac{y'}{x'}$, también estan en $E$.

Sea $d$ el máximo común divisor de $x$ e $y$. Entonces el punto $(x', y') = (\frac{x}{d}, \frac{y}{d})$ ha de estar en $E$ o en $-E$, pero todos los puntos de la semirrecta de la que estamos hablando son múltiplos positivos de este punto (que llamaremos generador de la semirrecta), por lo que $(x, y)$ está en el mismo subconjunto ($E$ o $-E$) que $(x', y')$, lo que indica que $(x', y') \in E$ y todos sus múltiplos positivos (que forman toda la semirrecta).

3) Puesto que el punto $(1, 0)$ ha de estar en $E$ o en $-E$, y $-E$ tiene las mismas propiedades que $E$, podemos suponer que $(1, 0) \in E$ (y por tanto, todo el semieje positivo de abscisas). Una vez asumido esto, demostremos que si un punto $(a, b) \neq (0, 0)$ (por el segundo punto

de la demostración, podemos asumir que $a$ y $b$ son primos entre sí, y que si $a$ es 0, $|b| = 1$) es de $E$, todos los puntos que quedan en el sector convexo determinado por la semirrecta generada por $(a, b)$ y el semieje positivo de abscisas están también en $E$.
Consideremos tres casos:

- $a = 0$:

Es evidente, puesto que si un punto $(c, d)$ está en el sector considerado, es porque $c \geq 0$ y $d$ tiene el mismo signo que $a$, por lo que podemos poner $(c, d)$ como combinación lineal entera positiva de $(0, b)$ y $(1, 0)$

$$(c, d) = c(1, 0) + |d|(0, b).$$

- $a > 0$:

En este caso, la condición equivalente a que el punto esté en el sector (y no en las semirrectas, en cuyo caso el resultado es obvio) es:

$$0 < \frac{|d|}{c} < \frac{|b|}{a}$$

donde $d$ y $b$ tienen el mismo signo (basta considerar las pendientes).
Veamos que en estas condiciones, la ecuación diofántica $k(c, d) = \alpha(a, b) + \beta(1, 0)$ tiene solución positiva (nótese que intentamos obtener un múltiplo de $(c, d)$, no necesariamente el propio $(c, d)$, pero por el segundo punto de la demostración podremos decir que $(c, d)$ también estará en $E$).
Si tomamos $k = |b|$, $\alpha = |d|$ y $\beta = kc - \alpha a$, es evidente que $k$ y $\alpha$ son positivos, y que $\beta$ también lo es se deduce de la relación entre las pendientes.

- $a < 0$:

En este caso, nótese primero que el semieje correspondiente de ordenadas también está en $E$, puesto que podemos obtener el punto $(0, b)$ como $(a, b) + |a|(1, 0)$.
Por tanto, si $c \geq 0$ se reduce a uno de los dos casos anteriores, por lo que tan solo habrá que considerar el caso en que $c < 0$; entonces, $a$ y $c$ tendrán el mismo signo, así como $b$ y $d$, y ahora la condición característica será:

$$\left|\frac{d}{c}\right| > \left|\frac{b}{a}\right|$$

(de nuevo, basta considerar las pendientes).
Puesto que un semieje de ordenadas está contenido en el sector (el correspondiente al signo de $b$ y de $d$), tan solo hemos de ver que podemos encontrar soluciones enteras para $k(c, d) = \alpha(a, b) + \beta(0, 1)$, donde $k$ y $\alpha$ son positivos, y $\beta$ tiene el mismo signo que $b$. Si tomamos $\alpha = |c|$ y $k = |a|$, tenemos que $\beta = |a|d - |c|b$, pero como $|a||d| - |c||b|$ es positivo, es evidente que $\beta$ tiene el signo deseado.

4) Una vez demostrado esto, tan sólo queda ver que la frontera entre $E$ y $-E$ es una recta que pasa por el origen; para ello definiremos el argumento de un par $(a, b) \neq (0, 0)$ como el ángulo entre $\pi$ y $-\pi$ que forma la semirrecta que lo contiene con el eje positivo de abscisas. Una expresión analítica podría ser la siguiente:

$$\arg(x,y)=\begin{cases}\pi+\arctan\frac{y}{x} & \text{Si } x<0, y\geq 0\\ \frac{\pi}{2} & \text{Si } x=0, y>0\\ \arctan\frac{y}{x} & \text{Si } x>0\\ -\frac{\pi}{2} & \text{Si } x=0, y<0\\ -\pi+\arctan\frac{y}{x} & \text{Si } x<0, y<0\end{cases}$$

Sean $\alpha=\sup_{(x,y)\in E}\arg(x,y)$ y $\beta=\inf_{(x,y)\in E}\arg(x,y)$, y hemos de ver que $\alpha-\beta=\pi$. Si asumimos que el semieje positivo de abscisas está en $E$, es obvio que $0\leq\alpha\leq\pi$ y $-\pi\leq\beta\leq 0$.

- Supongamos que $\alpha-\beta>\pi$. Entonces obtenemos las desigualdades siguientes:

$$\pi\geq\alpha>\pi+\beta\geq 0$$
$$0\geq\alpha-\pi>\beta\geq-\pi$$

En particular, de la primera desigualdad y de la continuidad del argumento, deducimos que existe un racional $\frac{q}{p}$ irreducible con $q$ positivo, tal que $\alpha>\arg(p,q)>\pi+\beta>\beta$, (nótese que $(p,q)\in E$).

Ahora bien, de la definición de argumento se desprende que el argumento de dos pares opuestos difiere en $\pi$, y si restamos $\pi$ a la desigualdad anterior obtenemos: $\alpha>\alpha-\pi>\arg(p,q)-\pi=\arg(-p,-q)>\beta$, y comparándolo con la segunda desigualdad, obtenemos que $(-p,-q)$ también pertenece a $E$, en contradicción con las propiedades de $E$.

- Supongamos entonces que $\alpha-\beta<\pi$, lo que da las desigualdades

$$\alpha<\pi+\beta$$
$$\alpha-\pi<\beta$$

Análogamente al caso anterior, existe un racional irreducible $\frac{q}{p}$, $q>0$, tal que $\alpha<\arg(p,q)<\pi+\beta$, por lo que $(p,q)\notin E$, y de nuevo, restando $\pi$ a toda la desigualdad, obtenemos que en este caso, $(-p,-q)$ tampoco es de $E$, lo que nuevamente contradice las propiedades de $E$.

Por tanto, podemos concluir que $\alpha-\beta=\pi$, lo que indica que la frontera entre $E$ y $-E$ es una recta de pendiente $m=\tan\alpha$.

5) Tan sólo queda estudiar el caso en que la pendiente $m$ es racional, puesto que si es irracional no contendrá ningún punto de $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ y $E$ estará perfectamente separado de $-E$. Ahora bien, si la pendiente $m$ es racional, la recta contendrá puntos de $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$, algunos de $E$ y otros de $-E$; pero, por lo demostrado en el segundo punto, si contiene un punto, ha de contener toda la semirrecta, pero por las propiedades de $E$, la semirrecta opuesta ha de estar en $-E$.

*Conclusión:*

Las únicas maneras de separar $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ en dos conjuntos con las propiedades mencionadas consisten en dividir el plano en dos semiplanos mediante una recta que pase por el origen; y si la recta tiene pendiente racional, asignar una de las semirrectas a $E$ y la otra a $-E$.

**OME 21. Problema 3. Solución**

*Primera solución* (de M. Ascensión López Chamorro)

La ecuación

$$\tan^2 2x + 2\tan 2x \tan 3x - 1 = 0$$

se puede escribir como

$$\tan 3x = \frac{1-\tan^2 2x}{2\tan 2x} = \cot 4x,$$

así que

$$3x + 4x = \frac{\pi}{2} + k\pi, \ \ k \in \mathbb{Z},$$

es decir

$$x = \frac{\pi}{14} + \frac{k\pi}{7}.$$

*Segunda solución*

Escribimos la ecuación como

$$\frac{\text{sen}\,^2 x}{\cos^2 2x} + 2\,\frac{\text{sen}\,2x}{\cos 2x}\,\frac{\text{sen}\,3x}{\cos 3x} - 1 = 0$$

o bien

$$\text{sen}\,^2 2x\cos^2 3x + 2\,\sin 2x\,\sin 3x\cos 2x - \cos^2 2x\cos 3x = 0$$

que se puede escribir

$$-(\cos^2 2x - \text{sen}\,^2 2x)\cos 3x + (2\text{sen}\,2x\cos 2x)\text{sen}\,3x = 0.$$

Simplificando queda

$$-\cos 4x\cos 3x + \sin 4x\sin 3x = 0$$

o bien

$$-\cos 7x = 0.$$

Las soluciones son

$$x = \frac{\pi}{14} + k\frac{\pi}{7}.$$

**OME 21. Problema 4. Solución**

Tenemos la identidad

$$a^3+b^3+c^3=\big((a+b+c)^2-3(ab+bc+ac)\big)(a+b+c)+3abc;$$

pero como

$$\frac{a+b+c}{abc}=\frac{1}{k} \implies abc=k(a+b+c)$$

la igualdad anterior se puede escribir

$$a^3+b^3+c^3=(a+b+c)\left[(a+b+c)^2-3(ab+bc+ac)+3k\right]$$

y por lo tanto este número no es primo, ya que $a+b+c>1$ y $a+b+c<a^3+b^3+c^3$ ya que la terna $a=b=c=1$ no cumple las condiciones.

Si $k$ es impar, la terna

$$a=\frac{k+3}{2},\ b=3,\ c=k;$$

cumple las condiciones, ya que

$$k(a+b+c)=k\Big(\frac{k+3}{2}+3+k\Big)=k\Big(\frac{3k+9}{2}\Big)=3k\,\frac{k+3}{2}=abc.$$

Para cualquier natural $k$, la terna

$$a=k+2,\ b=k,\ c=2;$$

cumple las condiciones, ya que

$$k(a+b+c)=k(k+2+k+2)=2k(k+2)=abc.$$

## OME 21. Problema 5. Solución

Se comprueba sin dificultad que $z = -i$ es una solución de la ecuación; como

$$z^3 + (-1+i)\,z^2 + (1-i)\,z + i = (z+i)\left(z^2 - z + 1\right)$$

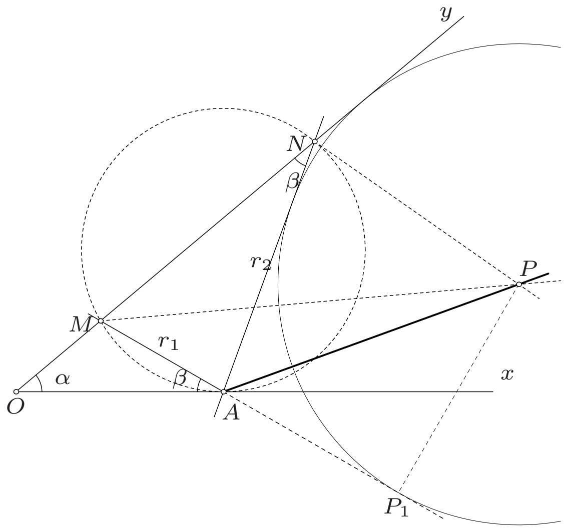
y las raíces de $z^2 - z + 1$ son

$$\frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}.$$

Las tres raíces tienen módulo 1, y es inmediato que la circunferencia pedida es la circunferencia unidad en el plano complejo, de ecuación $|z| = 1$.

## OME 21. Problema 6. Solución

*Primera solución*




Por la construcción de $P$, este punto equidista de $Oy$ y de $AN$, además también equidista de $Oy$ y de $r_1$, luego $P$ es el centro del círculo exinscrito al triángulo $AMN$ correspondiente al lado $AN$.

Llamando $\alpha$ al ángulo de las semirrectas $Ox$, $Oy$, y poniendo $\beta = \widehat{OAM} = \widehat{ONA}$, resulta

$$\widehat{PAN} = \frac{2\beta + \alpha}{2} = \beta + \frac{\alpha}{2},$$

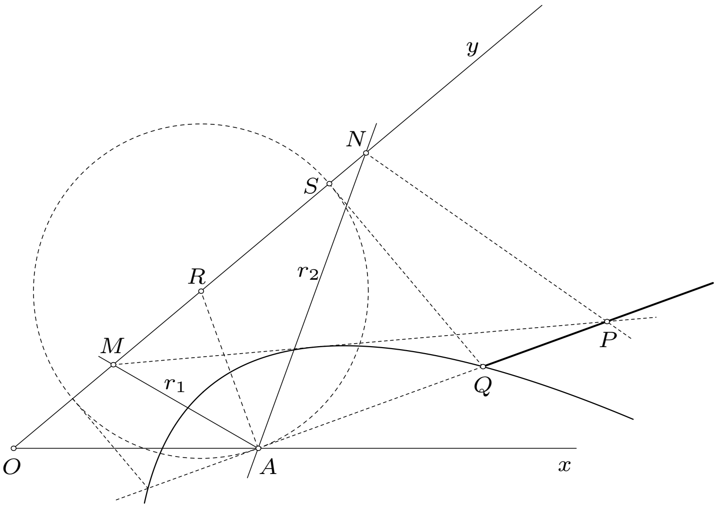
de donde se deduce

$$\widehat{PAx} = \frac{\alpha}{2}.$$

Luego $P$ estará en la bisectriz exterior del triángulo $AMN$ correspondiente al vértice $A$ que forma un ángulo constante $\alpha/2$ con $Ox$.

Al ser $P$ exincentro, equidista de la recta $Oy$ y $MA$ y esta distancia común es $PP_1$. En el triángulo $APP_1$ rectángulo en $P_1$ es $AP > PP_1 = \text{dist}(P, Oy)$ y por tanto, el lugar de $P$ es una semirrecta con origen en un punto que cumple

$$\text{dist}(P, Oy) \leq PA.$$




Los puntos para los que se cumple la igualdad

$$\text{dist}(P, Oy) = PA$$

forman una parábola de foco $A$ y directriz $Oy$. Basta entonces determinar la intersección de la parábola con la recta $AP$ más próxima a $P$; para ello se traza la perpendicular por $A$ a $AP$ que corta en $R$ a $Oy$, la circunferencia de centro $R$ y radio $RA$ corta a $Oy$ en $S$. Finalmente, la perpendicular por $S$ a $Oy$ corta a $AP$ en el punto $Q$ buscado y el lugar pedido es la semirrecta con origen en $Q$ en la dirección que forma ángulo $\alpha/2$ con $Ox$.

*Segunda solución* (M. Ascensión López Chamorro).

Sean $Ox$, $Oy$ las semirrectas dadas, y $A \in Ox$. Convenimos en llamar $M$ al punto más próximo a $O$ (de $M$ y $N$). Conviene observar que, al ser $AM$ y $AN$ antiparalelas con respecto a $Ox$, $Oy$, la manera de construir dos puntos $M$, $N$ en las condiciones del problema es trazar una circunferencia tangente a $Ox$ en $A$: los dos puntos de intersección de la circunferencia con $Oy$ son los puntos $M$ y $N$.
Sea $M_0 \in Oy$ tal que $OA = OM_0$ (El punto $R$ de la figura).
Por $A$ se traza una paralela a $Oy$ (la llamaremos $Ay'$); sea $s$ la bisectriz interior del ángulo $\widehat{xOy}$ , y sea $s'$ la paralela a $s$ trazada por $A$.
Los siguientes ángulos son iguales:

$$\widehat{AM_0O} = \widehat{OAM_0} = \widehat{M_0Ay'} = \alpha_0 \quad \text{(le llamamos así)}.$$

Los puntos $M$ y $N$ son los extremos de la cuerda determinada por $Oy$ sobre una circunferencia tangente a $Ox$ en $A$, como se ha dicho. En el caso de que la circunferencia sea tangente a las dos semirrectas, $r_1 = r_2$ y los tres puntos $M$, $N$ y $M_0$ coinciden.

Las bisectrices de los ángulos $\widehat{AMy}$ y $\widehat{ANy}$ determinan un exincentro del triángulo $AMN$, y por lo tanto son concurrentes con la bisectriz exterior del ángulo $\widehat{MAN}$. Ahora bien, $AM_0$ es la bisectriz interior de $\widehat{NAM}$, pues poniendo $\alpha = \widehat{OAM}$, se tiene

$$\widehat{MAM_0} = \widehat{OAM_0} - \widehat{OAM} = \alpha_0 - \alpha,$$
$$\widehat{M_0AN} = \widehat{M_0Ay'} - \widehat{NAy'} = \alpha_0 - \alpha.$$

Luego la bisectriz exterior de $\widehat{MAN}$ es la recta $s'$, independientemente de la posición de $M$ y $N$ sobre $Oy$.
Puesto que el caso extremo lo tenemos para $M \equiv N \equiv M_0$, si $P_0$ es el punto de intersección de la bisectriz de $\widehat{AM_0y}$ con $s'$, el lugar geométrico pedido es la semirrecta de origen $P_0$ contenida en $s'$, y que no contiene al punto A.

## OME 21. Problema 7. Solución

De acuerdo con las condiciones del problema, deberá ser

$$
\begin{aligned}
x^5 - px - 1 = (x^2 - ax + b)(x^3 + cx^2 + dx + e) = \\
= x^5 + (c-a)x^4 + (d - ac + b)x^3 + (e - ad + bc)x^2 + (bd - ae)x + be
\end{aligned}
$$

así que, identificando coeficientes, se obtiene el sistema

$$
\begin{cases}
c - a = 0 \\
d - ac + b = 0 \\
e - ad + bc = 0 \\
bd - ae = -p \\
be = -1
\end{cases}
$$

De la primera y quinta ecuaciones sale $c = a$, $e = -1/b$; de la segunda, $d = a^2 - b$, así que, sustituyendo en la cuarta,

$$p = -\frac{a + b(a^2 - b)}{b}.$$

Ahora bien, como el sistema tiene que ser compatible, se debe cumplir la tercera ecuación con los valores anteriores, luego

$$-\frac{1}{b} - a\left(a^2 - b\right) + ba = 0,$$

es decir $1 = ab\,(2b - a)$.
Ya que $a$ y $b$ son enteros, esta igualdad sólo es posible si los factores son $+1$ ó $-1$; en el primer caso, el sistema

$$
\begin{cases}
ab = 1 \\
2b - a = 1
\end{cases}
$$

equivale a la ecuación cuadrática $a^2 + a - 2 = 0$, cuyas raíces son $a = 1$ y $a = -2$; esta última no es válida porque entonces $b$ no sería entero ($b = -1/2$).
Por lo tanto, en este supuesto se tiene

$$a = 1, \; b = 1 \;\text{ y }\; p = -1.$$

La otra posibilidad conduce al sistema

$$
\begin{cases}
ab = -1 \\
2b - a = -1
\end{cases}
$$

equivalente a la ecuación cuadrática $a^2 - a + 2 = 0$, que no tiene soluciones reales. Por lo tanto, la única solución del problema es

$$a = 1, \; b = 1 \quad \text{y} \quad p = -1,$$

de la que se obtiene $c = 1$, $d = 0$, $e = -1$, y la descomposición factorial del polinomio

$$x^5 + x - 1 = (x^2 - x + 1)(x^3 + x^2 - 1)\,.$$

Las dos raíces mencionadas en el enunciado son

$$x_1 = \frac{1 + i\sqrt{3}}{2}, \quad x_2 = \frac{1 - i\sqrt{3}}{2}.$$

## OME 21. Problema 8. Solución

Las condiciones para que la matriz

$$\begin{pmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{pmatrix} \tag{1}$$

sea de suma constante son

$$a+b+c=a+d+g=a+e+i=d+e+f=b+e+h=c+f+i=g+h+i=c+e+g.$$

Despejando convenientemente se obtiene

$$\begin{aligned} a =& -i+2e \\ b =& 2e-h \\ c =& h+i-e \\ d =& 2i-2e+h \\ f =& -2i+4e-h \\ g =& -i+3e-h. \end{aligned} \tag{2}$$

Para que la matriz (1) sea de producto constante se debe cumplir

$$abc=adg=aei=def=beh=cfi=ghi=ceg. \tag{3}$$

*Caso I.*– Si $e=0$ entonces (2) se reduce a

$$\left.\begin{aligned} a =& -i \\ b =& -h \\ c =& h+i \\ d =& 2i+h \\ f =& -2i-h \\ g =& -i-h. \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Sustituyendo (4) en (3) resulta el sistema de ecuaciones

$$ih(h+i)=i(h+i)(2i+h)=(h+i)(2i+h)i=-hi(i+h)=0$$

cuyas soluciones $(i,h)\neq(0,0)$ son las mismas que las de la ecuación $i(h+i)=0$. Cuando $i=0$ resultan las matrices de suma y de producto constante

$$\begin{pmatrix} 0 & h & -h \\ -h & 0 & h \\ h & -h & 0 \end{pmatrix}, \quad h\in\mathbb{R} \tag{5}$$

y cuando $i \neq 0$, $i = -h$, las matrices

$$\begin{pmatrix} h & -h & 0 \\ -h & 0 & h \\ 0 & h & -h \end{pmatrix}, \quad h \neq 0. \tag{6}$$

*Caso II.*– Si $e \neq 0$, la ecuación $aei = beh$ implica, utilizando (2),

$$(h-i)(h+i-2e) = 0.$$

- Cuando $h = i$, la ecuación $aei = def$ implica, utilizando (2), $(i-e)^2 = 0$, es decir, $i = e$. Y la matriz (1) que entonces resulta,

$$\begin{pmatrix} h & h & h \\ h & h & h \\ h & h & h \end{pmatrix}, \quad h \neq 0, \tag{7}$$

es de suma y de producto constante.

- Si $e = \dfrac{h+i}{2}$, el sistema (3) es equivalente a la ecuación ($e \neq 0$)

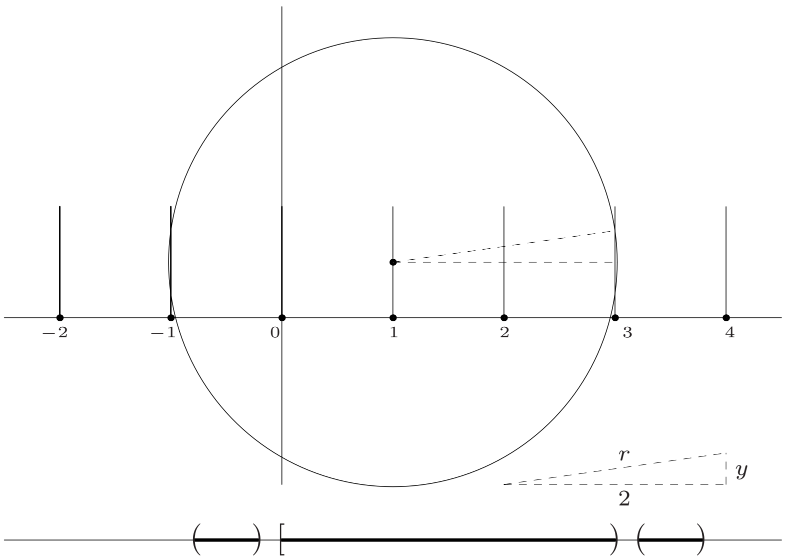
$$(h-i)^2 = 0,$$

lo que remite al caso anterior.

En resumen, las matrices de suma y producto constante deben ser de una de las formas (5), (6) o (7).

# OME 22. Problema 1. Solución

Consideramos la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ dada por $f(x) = \big([x], \{x\}\big)$ y observamos que la distancia definida en el enunciado entre dos puntos de $\mathbb{R}$, es la distancia euclídea entre sus imágenes por $f$ en el plano. De hecho, el conjunto imagen $f(\mathbb{R})$ queda descompuesto en un "peine" de segmentos verticales de altura 1 situados en los puntos del eje de abscisas de coordenadas enteras. El punto $3/2 \in \mathbb{R}$ se transforma en el $(1, 1/2)$ del plano. Los puntos pedidos son los que están dentro de la circunferencia de centro $(1, 1/2)$ y radio $202/100$. Es evidente que los segmentos verticales sobre los puntos de abscisas 0, 1 y 2 están completamente contenidos en la circunferencia. En cambio, los que están sobre las abscisas $-1$ y 3, sólo están contenidos parcialmente.




Para encontrar estos segmentos debemos resolver el triángulo rectángulo de la figura, de hipotenusa $r = 202/100 = 2 + 2/100$. Obtenemos

$$y = \frac{\sqrt{201}}{50} < \frac{1}{2}.$$

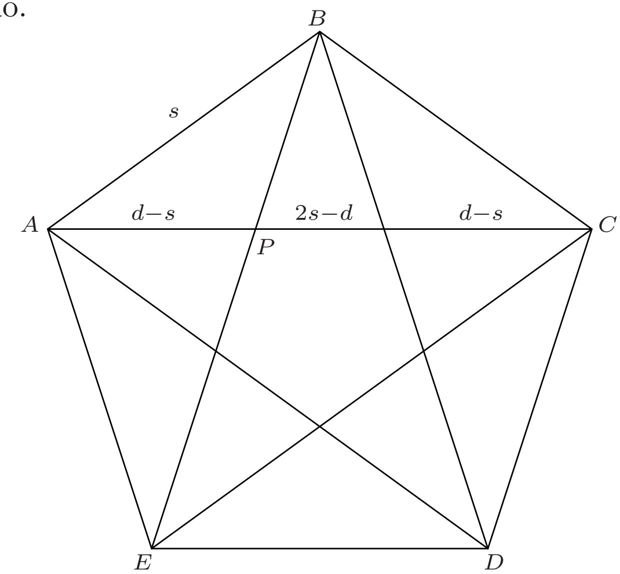
El conjunto buscado es

$$\left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{201}}{50}, -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{201}}{50}\right) \cup \big[0, 3\big) \cup \left(\frac{7}{2} - \frac{\sqrt{201}}{50}, \frac{7}{2} + \frac{\sqrt{201}}{50}\right).$$

# OME 22. Problema 2. Solución

a) Si tenemos $s = nd$ y $s' = n'd$, con $n, n'$ números naturales, entonces evidentemente, $s' - s = (n' - n)\, d$.

b) Llamamos $d$ a la diagonal $AC$ del pentágono y $s$ al lado. El paralelismo entre diagonales y lados opuestos produce cinco rombos interiores al pentágono, formados, cada uno, por dos lados consecutivos y las diagonales respectivamente opuestas. Una diagonal cualquiera, digamos la $AC$, queda pues partida en tres segmentos con longitudes tal como aparecen en la figura. El segmento central, de longitud $2s - d$, es el lado de un nuevo pentágono regular interior al dado.




La desigualdad triangular aplicada al triángulo $APB$ nos dice $(d - s) + (d - s) > s$ o bien $2d > 3s$ , de donde $2s - d < 1/2\, s$.
Si $d$ y $s$ fuesen conmensurables, es decir, existiera un segmento $u$ que dividiese a ambos, también dividiria a $2s - d$, que es el lado de un nuevo pentágono de lado menor que la mitad del primero. Iterando el proceso las veces que haga falta, resultaría al final que obtendríamos un pentágono de lado a la vez menor que $u$ y múltiplo de $u$, lo que es absurdo. Por tanto $s$ y $d$ deben ser inconmensurables.
*Observación:*
La semejanza de los triángulos $APB$ y $EPC$ nos da la relación

$$\frac{d}{s} = \frac{s}{d - s}$$

que da lugar a la ecuación

$$(d/s)^2 - (d/s) - 1 = 0$$

de solución positiva

$$\frac{d}{s} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}, \quad \text{número irracional.}$$

**OME 22. Problema 3. Solución**

*Primera solución*
Consideremos la ecuación
$$5^\alpha + 3 = 2^\beta.$$

Calculemos los posibles valores de $\alpha$ dando valores bajos de $\beta$. Los valores $\beta = 0, 1$ no dan solución. Para $\beta = 2$ nos sale $\alpha = 0$. Los valores $\beta = 4, 5, 6, 8, 9$ tampoco dan solución, y para $\beta = 7$ sale $\alpha = 3$.
Nos queda por demostrar que no hay solución para $\beta \geq 10$. Como $2^{10} = 1024$, calculando módulo 1024 nos queda $5^\alpha = -3 = 1021$, con $\alpha = 163$. pero las potencias de 5 módulo 1024 tienen periodicidad 256, de forma que $\alpha = 163 + k256$.
En $\mathbb{Z}$ tendremos
$$5^{163}\, 5^{k256} + 3 = 2^\beta.$$

Si calculamos ahora módulo 257, tendremos $256^i = 1$ y $5^{163} + 3 = 2^\beta$, o sea, $246 = 2^\beta$. Pero las potencias de 2 módulo 257 tienen periodicidad 16 ya que $2^8 = 256 = -1$. Calculando las potencias de 2 nos sale $2^0 = 1$, $2^1 = 2$, $2^2 = 4$, $2^3 = 8$, $2^4 = 16$, $2^5 = 32$, $2^6 = 64$, $2^7 = 128$, $2^8 = -1$, $2^9 = -2$, $2^{10} = -4$, $2^{11} = -8$, $2^{12} = -16$, $2^{13} = -32$, $2^{14} = -64$, $2^{15} = -128$ y ninguno de ellos es $246 = -11$.
Las únicas soluciones posibles son pues
$$5^1 + 3 = 2^3 \quad \text{y} \quad 5^3 + 3 = 2^7.$$

*Segunda solución*
Las únicas soluciones con $m \leq 7$ son $5^0 + 3 = 2^2$, $5^1 + 3 = 2^3$ y $5^3 + 3 = 2^7$. Si hay otra solución, será $m > 7$ y entonces $n$ cumplirá la condición
$$5^n + 3 \equiv 0 \text{ módulo } 2^8.$$

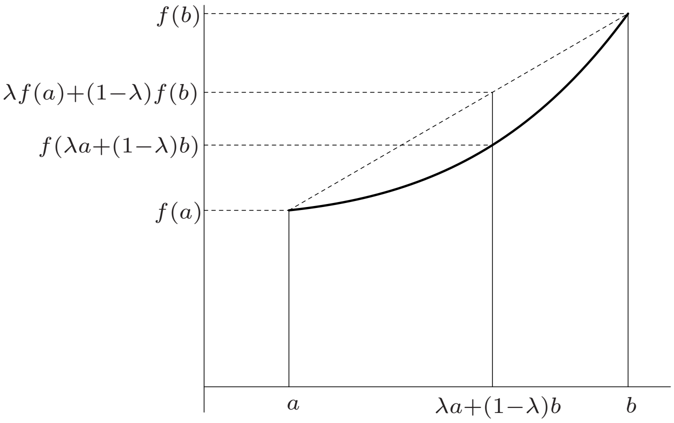
De donde resulta (a partir de una tabla de restos potenciales de 5 módulo $2^8$) que $n = 35 + 64k$, con $k = 0, 1, 2, \ldots$.
Entonces,
$$5^n + 3 = 5^{35+64k} + 3 \equiv 14 \cdot 16^k + 3 \text{ módulo } 257,$$
pues se puede comprobar que $5^{35} \equiv 14$ y $5^{64} \equiv 16$ módulo 257.
Ahora, se tiene $16^k \equiv \pm 1, \pm 16$ módulo 257, luego
$$5^n + 3 \equiv 17,\ -30,\ -11 \text{ ó } 36 \text{ módulo } 257,$$

mientras que
$$2^m \equiv \pm 1,\ \pm 2,\ \pm 4,\ \pm 8,\ \pm 16,\ \pm 32,\ \pm 64 \text{ ó } \pm 128 \text{ módulo } 257,$$

luego la coincidencia de valores entre $5^n + 3$ y $2^m$ cuando $m > 7$ es imposible.

## OME 22. Problema 4. Solución

Si $f$ es una función real de variable real tal que $f' > 0$ y $f'' > 0$ estonces es una función convexa, es decir, la gráfica está por debajo de cualquier cuerda, tal como está representado en la figura.



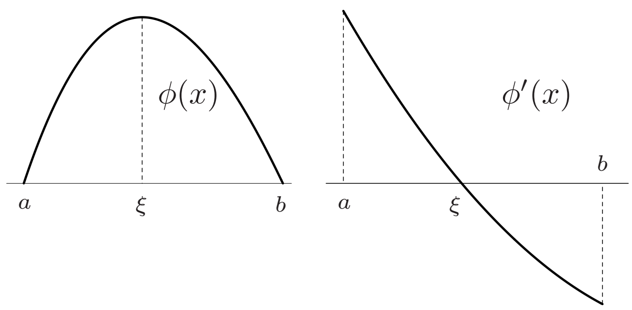

En el caso que $\lambda = \frac{1}{2}$, tendremos el resultado del enunciado.
Para demostrar la propiedad, consideremos la función

$$\phi(x) = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) - f(x)$$

cuyas derivadas son

$$\phi'(x) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} - f'(x) \quad \text{y} \quad \phi''(x) = -f''(x).$$

Es evidente que $\phi(a) = \phi(b) = 0$ y que $\phi'(\xi) = 0$ para un cierto punto $\xi \in (a, b)$, por el teorema de Rolle. Este mismo teorema nos dice que el punto $\xi$ es único. Como que $\phi''(x) = -f''(x) < 0$, resulta que $\phi'$ es decreciente con un único cero $\xi$. De ahí que $\phi(x)$ solamente pueda anularse en $a$ y $b$ y $\phi(x) > 0$ para todo $x \in (a, b)$.



## OME 22. Problema 5. Solución

*Primera solución*

Los puntos $(0, b)$ y $(0, -b)$ son dos puntos de coordenadas racionales de $\Gamma$; para hallar un tercer punto hacemos la siguinte identificación.

$$x^3 + bx + b^2 = y^2 = \left(b + \frac{x}{2}\right)^2 = b^2 + bx + \frac{x^2}{4}$$

de donde

$$x = \frac{1}{4}, \quad y = \pm\left(b + \frac{1}{8}\right).$$

Se han obtenido los cuatro puntos

$$(0, b), \quad (0, -b), \quad \left(\frac{1}{4}, b + \frac{1}{8}\right), \quad \left(\frac{1}{4}, -b - \frac{1}{8}\right)$$

Puesto que elegidos tres de ellos no están alineados, se obtiene un triángulo solución. Por tanto hemos obtenido 4 soluciones posibles.

*Segunda solución*

Una vez hallado el punto $(0, b)$, trazamos una recta variable por él de pendiente $t$, y de ecuación $y = tx + b$. Las intersecciones con la cúbica, después de eliminar la $x = 0$ que corresponde al punto $(0, b)$, vendrán dadas por la ecuación de segundo grado

$$x^2 - t^2x + b - 2bt = 0,$$

que tiene por soluciones

$$x = \frac{t^2 \pm \sqrt{t^4 - 4(b - 2bt)}}{2}.$$

Los posibles valores racionales de $t$ que nos den un valor racional de $x$ corresponderán a puntos sobre $\Gamma$ de coordenadas racionales. Por ejemplo, es evidente que para $t = 1/2$ salen los puntos obtenidos antes.

## OME 22. Problema 6. Solución

Consideremos las 15-raíces complejas de la unidad, de las que sólo una de ellas es real, $z = 1$, y las demas son 7 parejas complejas conjugadas. Tenemos

$$z^{15} - 1 = (z-1)\prod_1^7 (z-\epsilon_k)(z-\overline{\epsilon}_k), \quad \text{con} \quad \epsilon_k = e^{i\,\frac{2k\pi}{15}}$$

o bien

$$\frac{z^{15}-1}{z-1} = 1 + z + z^2 + \cdots + z^{14} = \prod_1^7 \left(z^2 - 2z\cos\frac{2k\pi}{15} + 1\right)$$

y dando a $z$ el valor $-1$

$$1 = \prod_1^7 \left(2 + 2\cos\frac{2k\pi}{15}\right) = 2^7 \prod_1^7 \left(1 + \cos\frac{2k\pi}{15}\right) = 2^{14}\prod_1^7 \cos^2\frac{k\pi}{15},$$

donde se ha utilizado la fórmula $1 + \cos 2\alpha = 2\cos^2\frac{\alpha}{2}$. De la última igualdad sale

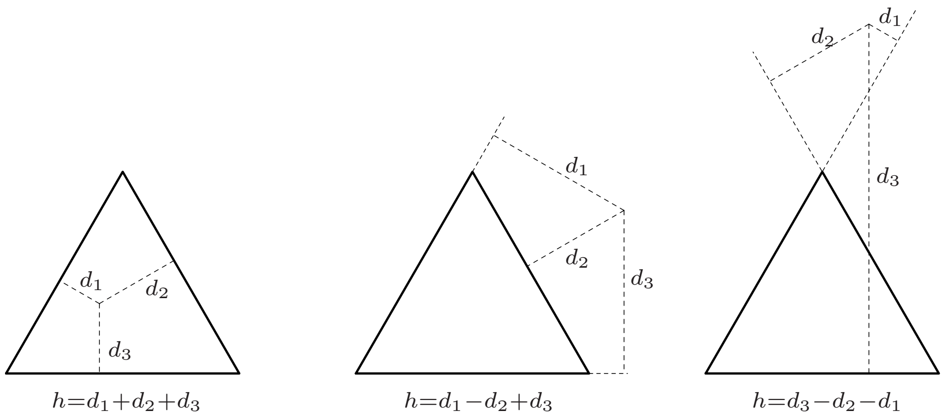
$$\prod_1^7 \cos^2\frac{k\pi}{15} = \frac{1}{2^{14}} \quad \text{de donde} \quad \prod_1^7 \cos\frac{k\pi}{15} = \pm\frac{1}{2^7}.$$

El signo debe ser positivo, ya que los 7 ángulos son del primer cuadrante y los cosenos son positivos. En el producto del enunciado hay 14 ángulos, 7 del primer cuadrante, con coseno positivo, y 7 del segundo cuadrante, con cosenos negativos y en valor absoluto iguales a los 7 primeros ya que son suplementarios de ellos. Por lo tanto el producto de todos los cosenos será negativo.

$$\prod_1^{14} \cos\frac{k\pi}{15} = \prod_1^7 \cos\frac{k\pi}{15}\,\prod_8^{14} \cos\frac{k\pi}{15} = -\frac{1}{2^7}\frac{1}{2^7} = -\frac{1}{2^{14}}$$

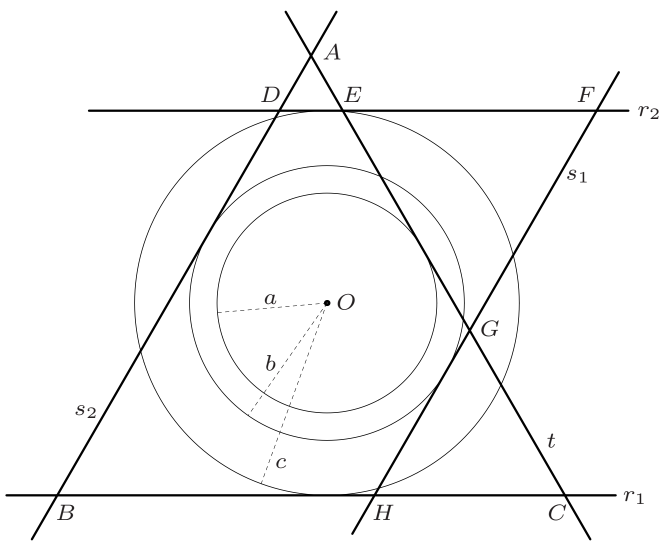
## OME 23. Problema 1. Solución

Si desde un punto $P$ del plano se trazan perpendiculares a los tres lados de un triángulo equilátero, se obtienen 3 segmentos cuya suma (con los signos que convenga) es igual a la altura del triángulo. La demostración se obtiene simplemente calculando las áreas de los triángulos determinados por $P$ y los vértices del triángulo equilátero, sumando o restando segun los casos.




Caso I Caso II Caso III

Sean ahora $a < b < c$ los tres lados dados. Dibujamos tres circunferencias concéntricas con centro $O$ y radios $a$, $b$ y $c$. Trazamos una tangente cualquiera a la circunferencia de radio $a$. Trazamos tangentes paralelas a la circunferencia de radio $b$ que formen ángulo de $60°$ con la primera. Sean $s_1$ y $s_2$. Análogamente, trazamos tangentes paralelas $r_1$ y $r_2$ que formen ángulo de $60°$ con $t$ y con $s_1$ y $s_2$.



De esta forma obtenemos los triángulos equiláteros $ABC$, $ADE$, $EFG$ y $GCH$ que cumplen las condiciones del enunciado, y además, son los únicos que tienen área diferente. Los giros alrededor de $O$ producen figuras equivalentes. Respecto de cada uno de los triángulos equiláteros, el centro $O$ puede estar situado en el interior (Caso I de la primera figura) y en este caso $h = a + b + c$, o puede estar situado como en el Caso II, y en este caso puede ser $h = a + b - c$, $h = b + c - a$ o $h = c + a - b$. El Caso III no puede darse ya que sería $h = a - b - c < 0$, o bien $h = b - c - a < 0$ o bien $h = c - a - b < 0$ por $a$, $b$, $c$ los lados de un triángulo.
En los cuatro casos que nos quedan, y llamando $p$ al semiperímetro, $a + b + c = 2p$, $a + b - c = 2(p - c)$, $b + c - a = 2(p - a)$, $c + a - b = 2(p - b)$, de donde las áreas

$$\begin{aligned} S(ABC) &= \frac{4\sqrt{3}p^2}{3}, \\ S(ADE) &= \frac{4\sqrt{3}(p-c)^2}{3}, \\ S(EFG) &= \frac{4\sqrt{3}(p-b)^2}{3}, \\ S(CGH) &= \frac{4\sqrt{3}(p-a)^2}{3}. \end{aligned}$$

## OME 23. Problema 2. Solución

Pongamos

$$u = (1, 2, \ldots, n) \;\; \text{y} \quad v = \left( \binom{n}{1}, \binom{n}{2}, \ldots, \binom{n}{n} \right).$$

Sabemos que $|u \cdot v| \leq \|u\| \cdot \|v\|$. En este caso

$$\|u\| = \sqrt{1^2 + 2^2 + \ldots + n^2} = \sqrt{\frac{(2n+1)n(n+1)}{6}} = \sqrt{\frac{(2n^3 + 3n^2 + n)}{6}}$$

y

$$\|v\| = \sqrt{\binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \ldots + \binom{n}{n}} = \sqrt{2^n - 1}$$

luego

$$1 \cdot \sqrt{\binom{n}{1}} + 2 \cdot \sqrt{\binom{n}{2}} + \ldots + n \cdot \sqrt{\binom{n}{n}} \leq$$

$$\leq \sqrt{2^n - 1} \sqrt{\frac{(2n^3 + 3n^2 + n)}{6}} =$$

$$= \sqrt{2^{n-1} \left( 2 - \frac{1}{2^{n-1}} \right) \cdot \frac{1}{2} \frac{(2n^3 + 3n^2 + n)}{3}} =$$

$$= \sqrt{2^{n-1} \left( 1 - \frac{1}{2^n} \right) \cdot \frac{(2n^3 + 3n^2 + n)}{3}}.$$

Para tener el resultado sólo queda probar que

$$\left( 1 - \frac{1}{2^n} \right) \cdot \frac{(2n^3 + 3n^2 + n)}{3} < n^3$$

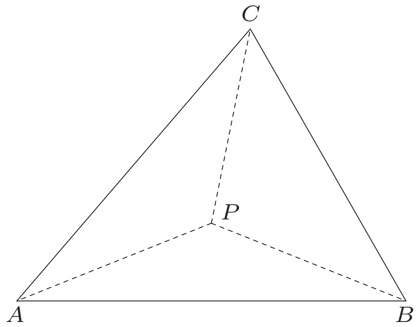
lo que es equivalente a

$$\frac{n^3}{3} - n^2 - \frac{n}{3} + \frac{1}{2^n} \left( \frac{2n^3}{3} + n^2 + \frac{n}{3} \right) > 0$$

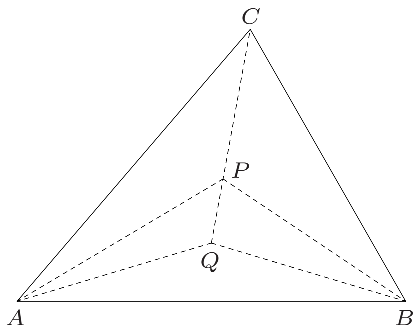
Para $n = 1, 2, 3$ se comprueba directamente y para $n \geq 4$ tenemos que $\dfrac{n^3}{3} - n^2 - \dfrac{n}{3} > 0$ ya que la función $y = \dfrac{x^3}{3} - x^2 - \dfrac{x}{3}$ es positiva y creciente para $x > 4$.

OME 23. Problema 3. Solución

En el triángulo $ABC$ tenemos $n = 1$, $s = 3$, $v = 3$. Tomando un punto $P$ en el interior del triángulo unido con los vértices resultan 3 triángulos; se tiene ahora $n = 3$, $s = 6$, $v = 4$.




De una forma general, tomemos un nuevo punto $Q$ en el interior de los triángulos formados. El triángulo $APC$ se sustituye por los triángulos $AQP$, $AQC$, y $CQP$; esto es, al aumentar en una unidad el número de vértices, el número de triángulos lo hace en 2 y el de aristas en 3. Después de elegir $h$ puntos en el interior del triángulo, el número de triángulos se habrá incrementado en $2h$, y en $3h$ los lados; luego en total se tendrá $n = 1 + 2h$, $s = 3 + 3h$, $v = 3 + h$, y se cumplirá $n + v = s + 1$, fórmula parecida a la de Euler para los poliedros.




Es inmediato comprobar que como $1 + 2h$ es siempre impar, no existe ninguna descomposición en número par de triángulos.
Por otra parte, como cada lado, salvo los del triángulo original, es común a dos triángulos, se tiene que $(s - 3) \cdot 2 + 3 = 3n$ de donde $s = \dfrac{3(n+1)}{2}$ y $v = \dfrac{n+5}{2}$.

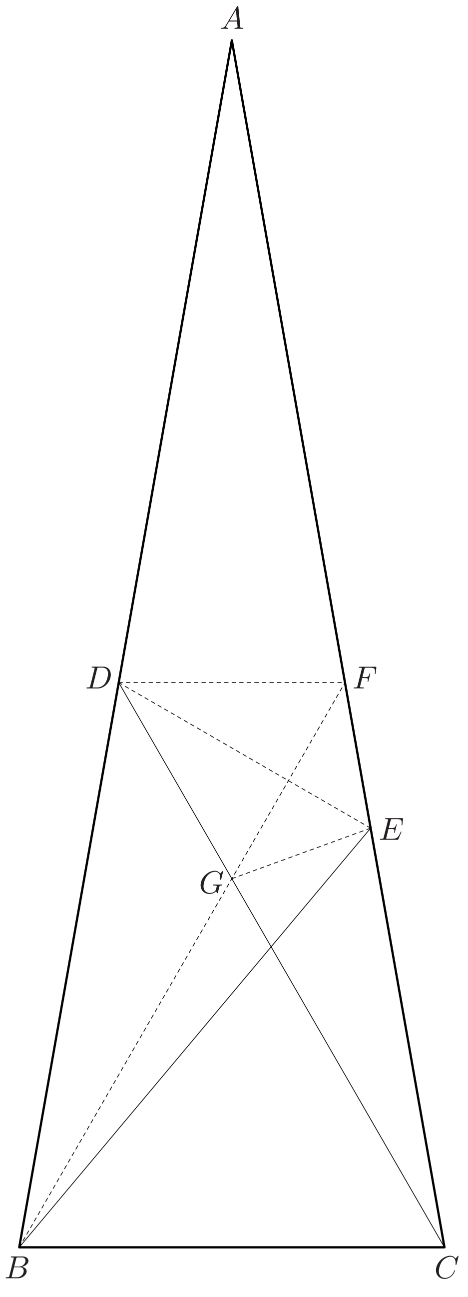
# OME 23. Problema 4. Solución

En el primer caso, de la primera ecuación despejamos $y = 1-x$, sustituimos en la inecuación y hacemos operaciones, lo que nos proporciona $(a-b)^2x^2 \leq (a-b)^2x$, cuya solución es el intervalo $[0,1]$ y por lo tanto $y$ recorre el mismo intervalo. Geométricamente es el segmento cuyos extremos tienen por coordenadas los puntos $(0,1)$ y $(1,0)$.
En el segundo caso, trabajamos de la misma manera y con un poco más de esfuerzo tenemos que:

$$x(x-1)(a-b)^2\left((a-b)^2x^2 + (a^2+2ab-3b^2)x + (a^2+2ab+3b^2\right) \leq 0$$

y puesto que $(a-b)^2x^2 + (a^2+2ab-3b^2)x + (a^2+2ab+3b^2)$ es siempre positivo, tenemos las mismas soluciones que antes: $x \in [0,1]$, e $y \in [0,1]$.

**OME 23. Problema 5. Solución**




En el triángulo de la figura se dibuja $DF$ la paralela a $BC$, el triángulo $BGC$ es equilátero, luego $GC = BC$, el triángulo $BCE$ es isósceles, puesto que tiene dos ángulos de 50°, consecuentemente $BC = CE$. Luego $CE = GC$ y el triángulo $CGE$ también es isósceles;

$$\widehat{EGC} = \widehat{GEC} = \frac{1}{2}(180^\circ - 20^\circ) = 80^\circ$$

y

$$\widehat{FGE} = 180^\circ - \widehat{DGF} - \widehat{EGC} = 40^\circ$$

y

$$\widehat{GFE} = 180^\circ - \widehat{FBC} - \widehat{FCB} = 40^\circ.$$

Por tanto, $\widehat{FGE}$ es isósceles y como $DFG$ es equilátero, los triángulos $DEF$ y $DEG$ son iguales, luego $DE \perp GF$, esto es $DE$ es la altura del triángulo equilátero $DFG$; por tanto

$$\widehat{EDC} = \frac{1}{2}\widehat{FDC} = 30^\circ.$$

**OME 23. Problema 6. Solución**

a) Tenemos $P_n(0) = 1$ y

$$P_n\left(\frac{3}{4}\right) = \left(\frac{3}{4}\right)^{n+2} - \frac{3}{2} + 1 = \left(\frac{3}{4}\right)^{n+2} - \frac{1}{2}$$

pero $\left(\frac{3}{4}\right)^{n+2}$ es decreciente y para $n = 1$ es $\left(\frac{3}{4}\right)^{1+2} = \frac{27}{64} < \frac{1}{2}$, de donde resulta que $P_n(\frac{3}{4}) < \frac{1}{2}$.
Por el teorema de Bolzano sabemos que existe un $c_n \in (0, 3/4)$ tal que $P_n(c_n) = 0$ y $P(x)$ tiene por lo menos un cero en $(0, 1)$.
Este cero debe ser único. En efecto, la derivada $P'(x) = (n + 2)x^{n+1} - 2$ se anula en un único punto de $(0, 1)$,

$$\alpha_n = \left(\frac{2}{n+2}\right)^{\frac{1}{n+1}} < 1.$$

Como que $P_n(1) = 0$ y $P_n(c_n) = 0$, el teorema de Rolle nos asegura que $c_n < \alpha_n < 1$ y que no puede existir otro cero de $P_n(x)$ en $(0, 1)$.

b) Como que $0 < c_n < \frac{3}{4}$, tenemos $0 < c_n^{n+2} < \left(\frac{3}{4}\right)^{n+2}$ y

$$\lim_{n\to\infty} c_n^{n+2} = 0.$$

Pero de $c_n^{n+2} - 2c_n + 1 = 0$ sale

$$c_n = \frac{c_n^{n+2} + 1}{2}$$

y $\lim_{n\to\infty} c_n$ existe y vale $\frac{1}{2}$.

**OME 24. Problema 1. Solución**

En primer lugar $x_1 = 1, x_1 < x_2 \leq 2$ implica que $x_2 = 2$ y $x_2 - x_1 = 1$.
Sea ahora $k$ cualquier número natural mayor que 1; dispongamos los $2k$ números

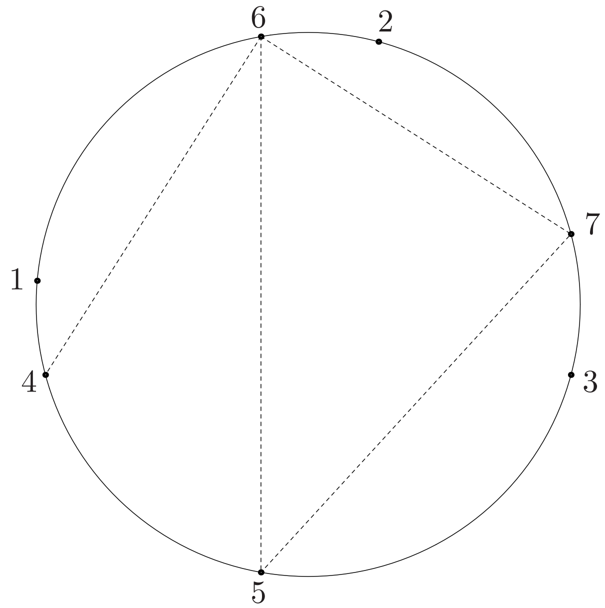
$$\{1, 2, 3, \ldots, 2k\}$$

agrupados en $k$ bloques de la siguiente forma:

$$\{1, 1+k\} \quad \{2, 2+k\} \ldots \{k-1, 2k-1\} \quad \{k, 2k\}$$

como $x_{k+1} \leq 2k$, Los números $\{x_1, x_2, \ldots, x_{k+1}\}$ son $k+1$ números entre 1 y $2k$ y habrá dos de ellos perteneciendo al mismo bloque, pues sólo hay $k$ bloques. Esos los que verifican que $x_r - x_s = k$.

# OME 24. Problema 2. Solución




Ejemplo de configuración

Vamos a unir con un segmento dos puntos relacionados. Veamos que en una configuración de $n$ puntos hay un segmento más que en una configuración de $n-1$ puntos, lo que proporciona el resultado que se quiere probar junto con el hecho de que en una configuración de tres puntos no hay ningún segmento dibujado.
Supongamos que tenemos una configuración de $n-1$ puntos; añadimos una unidad a todas las marcas y entre dos cualesquiera de esos $n-1$ puntos colocamos una nuevo punto marcado con 1; sólo falta el segmento que une esos dos puntos elegidos para tener una configuración de $n$ puntos.
Por lo tanto si tenemos $n$ puntos, el número de pares de puntos relacionados es $n-3$.

# OME 24. Problema 3. Solución

Si $a$ y $b$ son enteros, módulo 41 tenemos las siguientes equivalencias:

$$\begin{aligned}
25a + 31b \equiv 0 \;&\Leftrightarrow \qquad \text{(multiplicando por 2)}\\
\Leftrightarrow\; 50a + 62b \equiv 0 \;&\Leftrightarrow\\
\Leftrightarrow\; 9a + 21b \equiv 0 \;&\Leftrightarrow\\
\Leftrightarrow\; 3(3a + 7b) \equiv 0 \;&\Leftrightarrow \qquad \text{(dividiendo por 3)}\\
\Leftrightarrow\; 3a + 7b \equiv 0 \;&\pmod{41},
\end{aligned}$$

en las que se ha utilizado el hecho que 2 y 3 son primos con 41.

# OME 24. Problema 4. Solución

*Primera solución (combinatoria)*

Llamemos $f_n$ a la sucesión de Fibonacci propiamente dicha, es decir, la que cumple $f_{n+1} = f_n + f_{n-1}$, con $f_1 = 1$ y $f_2 = 1$, y pongamos $a_n = f_{n+1}$ para $n \geq 1$. La sucesión $a_n$ cumple también la recurrencia $a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$ pero con las condiciones iniciales $a_1 = 1$ y $a_2 = 2$. La ventaja de la sucesión $a_n$ es que tiene interpretaciones combinatorias más fáciles de establecer. Por ejemplo, $a_n$ es el número de maneras de subir una escalera de $n$ peldaños, si podemos subir un solo peldaño o bien dos peldaños en un solo paso. Debe cumplirse $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ ya que si el primer paso es de un solo peldaño, nos quedaran $n-1$ por subir, y esto se podrá hacer de $a_{n-1}$ maneras distintas; o bien en el primer paso subimos 2 peldaños, nos quedan $n-2$ por subir, y esto se puede hacer de $a_{n-2}$ formas distintas. Además, $a_1 = 1$, ya que una escalera de 1 peldaño sólo se puede subir de una única manera, y $a_2 = 2$ ya que una escalera de 2 peldaños se puede subir de dos maneras distintas.

Supongamos ahora que queremos subir una escalera de $2n+1$ peldaños. Pueden suceder 2 cosas: o bien paramos en el peldaño $n$ y de él subimos hasta arriba los $n+1$ peldaños que quedan, y esto se puede hacer de $a_n a_{n+1}$ maneras distintas; o bien subimos $n-1$ peldaños, luego un paso de 2 peldaños, y al final subimos otros $n$, y esto lo podemos hacer de $a_{n-1}a_n$ maneras, de donde $a_{2n+1} = a_n a_{n+1} + a_{n-1}a_n$.

De esta igualdad deducimos $f_{2n+2} = f_{n+1}f_{n+2} + f_n f_{n+1} = f_{n+1}^2 + 2f_n f_{n+1}$, es decir

$$f_{2n} = f_n^2 + 2f_n f_{n-1}.$$

*Segunda solución (algebraica)*

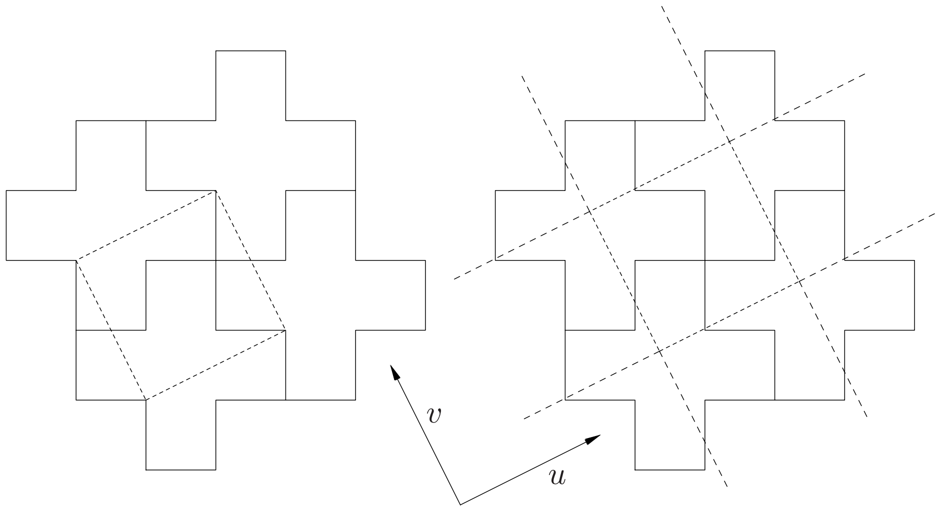
Los números de Fibonacci cumplen la relación

$$f_{n+m} = f_{n-1}f_m + f_n f_{m+1}.$$

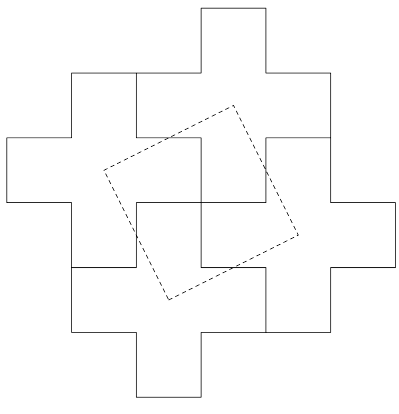
En efecto, para $m = 1$ tenemos $f_{n+1} = f_{n-1}f_1 + f_n f_2 = f_{n-1} + f_n$, (obsérvese la importancia de las condiciones iniciales en la demostración de estas recurrencias). Si hacemos inducción sobre $m$ tendremos $f_{n+m+1} = f_{n+m} + f_{n+m-1} = f_{n-1}f_m + f_n f_{m+1} + f_{n-1}f_{m-1} + f_n f_m = f_{n-1}(f_m + f_{m-1}) + f_n(f_{m+1} + f_m) = f_{n-1}f_{m+1} + f_n f_{m+2}$, ý la fórmula es cierta por inducción. Haciendo ahora $n = m$ sale

$$f_{2n} = f_{n-1}f_n + f_n f_{n+1} = f_{n-1}f_n + f_n(f_n + f_{n-1}) = f_n^2 + 2f_n f_{n-1}.$$

# OME 24. Problema 5. Solución




Consideremos el "embaldosado" del plano con cruces congruentes. Teniendo en cuenta las traslaciones de vectores $\overrightarrow{u}$ y $\overrightarrow{v}$ como generadores del embaldosado, observamos que el cuadrado de lados $\overrightarrow{u}$ y $\overrightarrow{v}$ aplicado en cualquier punto del plano es una región fundamental, es decir un motivo mínimo que por sucesivas traslaciones de vectores $\pm n\overrightarrow{u} \pm m\overrightarrow{v}$ engendra también el diseño. Si ponemos el cuadrado de modo que corte a 4 cruces, tendremos una partición de la cruz, de modo que las partes puedan formar el cuadrado.
Hay pues una infinidad de soluciones para el problema, localizando el vértice del cuadrado de modo que corte solamente a cuatro cruces. La figura de la izquierda muestra la división del enunciado, y la de la derecha una división en una posición general. La figura siguiente presenta la división de la cruz en 4 partes iguales y la forma en la que dichas partes componen un cuadrado.



## OME 24. Problema 6. Solución

Escribimos la expresión

$$y^2 = x^4 - 22x^3 + 43x^2 + 858x + t^2 + 10452(t + 39)$$

en la siguiente forma:

$$y^2 = (x^2 - 11x - 5226)(x^2 - 11x + 5148) + (t + 5226)^2$$

La expresión $x^2 - 11x - 5226$ se anula para $x = -67$ y para $x = 78$, lo que da soluciones enteras $y = \pm(t + 5226)$.

## OME 25. Problema 1. Solución

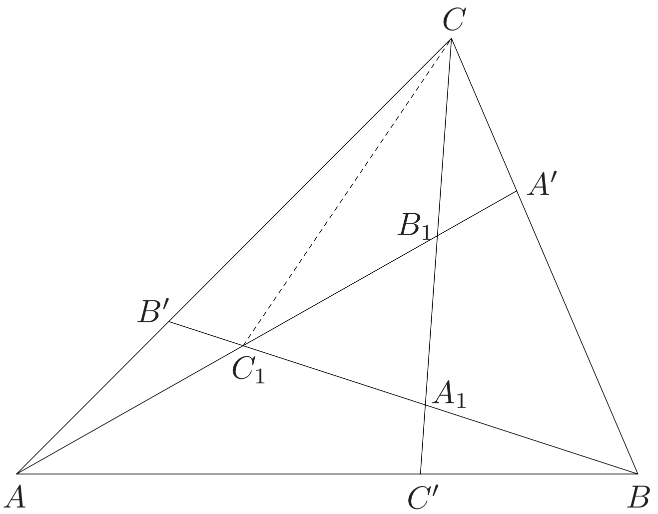
Si $n = 1$, es $p_1 = 1$, si $n = 2$, es $p_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}$; si $n = 3$, tenemos $p_3 = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3}$; En general

$$\begin{aligned} p_n &= \frac{1}{n} + \frac{n-1}{n} \cdot \frac{1}{n} + \left(\frac{n-1}{n}\right)^2 \cdot \frac{1}{n} + \ldots + \left(\frac{n-1}{n}\right)^{n-1} \cdot \frac{1}{n} = \\ &= \frac{1}{n}\left[1 + \frac{n-1}{n} + \left(\frac{n-1}{n}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{n-1}{n}\right)^{n-1}\right] = 1 - \left(\frac{n-1}{n}\right)^n \end{aligned}$$

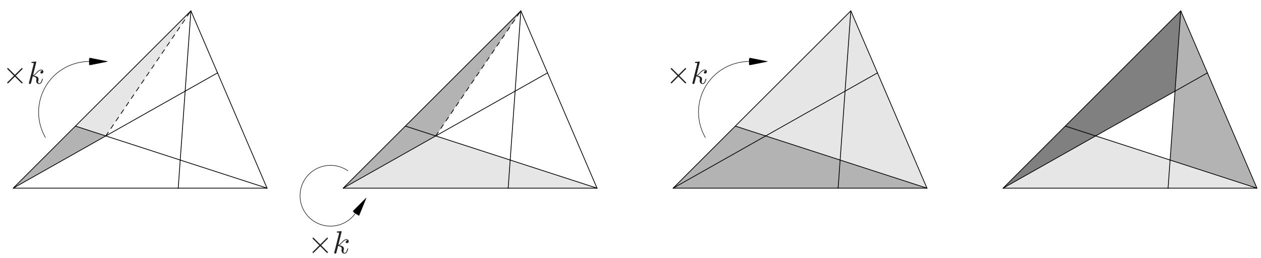
$$\lim_{n\to\infty} p_n = 1 - e^{-1}$$

La sucesión $1 - \left(\frac{n-1}{n}\right)^n$ es una sucesión decreciente y por lo tanto la mayor de las cotas inferiores es el límite.

## OME 25. Problema 2. Solución




Para resolver el problema utilizaremos varias veces que si dos triangulos tienen la misma altura, entonces la relación de áreas es igual a la de las bases; o bien que si tienen la misma base, la relación de áreas es la de las alturas.
Para empezar, llamaremos $s$ al área del triángulo pequeño $AB'C_1$. El área del triángulo $B'C_1C$ será $ks$, y el del $AC_1C$ la suma $s + ks$.
Los dos triángulos $AC_1C$ y $AC_1B$ comparten la base $AC_1$, luego el $AC_1B$ tiene área $k(s + ks) = ks + k^2s$. Simplemente sumando, nos queda que el triángulo $ABB'$ tiene área $s + ks + k^2s$.




Los triángulos $BB'A$ y $BB'C$ comparten altura, luego el $BB'C$ tiene área $ks(1 + k + k^2)$.
Y el triángulo total $ABC$ tendrá área $S = s(1 + k)(1 + k + k^2)$.
El triángulo central $A_1B_1C_1$ tendrá un área $S'$ que se puede obtener restando al área total $S$ la de los tres triángulos $ABC_1$, $BCA_1$ y $CAB_1$, las tres iguales a $s(k + k^2)$. Es decir,

$$S' = S - 3s(k + k^2) = s\big((1 + k)(1 + k + k^2) - 3(k + k^2)\big) = s(1 - k)^2(1 + k)$$

y por lo tanto

$$\frac{S'}{S} = \frac{(1 - k)^2}{1 + k + k^2}.$$

## OME 25. Problema 3. Solución

*Primera solución*

Veamos la primera desigualdad

$$\left(\frac{1}{2}\frac{3}{4}\frac{5}{6}\cdots\frac{99}{100}\right)^2=\frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{3}{4}\frac{3}{4}\cdots\frac{99}{100}\frac{99}{100}>$$

$$>\frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{3}{4}\frac{3}{4}\cdots\frac{\cancel{99}}{100}\frac{98}{\cancel{99}}>\frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{3}{4}\frac{3}{4}\cdots\frac{97}{\cancel{98}}\frac{\cancel{98}}{100}>\frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{3}{4}\frac{3}{4}\cdots\frac{96}{\cancel{97}}\frac{\cancel{97}}{100}>\cdots$$

$$\cdots>\frac{1}{2}\frac{1}{100}\quad\Longrightarrow\quad\frac{1}{10\sqrt{2}}<\frac{1\cdot3\cdot5\ldots99}{2\cdot4\cdot6\ldots100}$$

Y ahora veamos la otra

$$\left(\frac{1}{2}\frac{3}{4}\frac{5}{6}\cdots\frac{99}{100}\right)^2=\frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{3}{4}\frac{3}{4}\cdots\frac{99}{100}\frac{99}{100}<$$

$$<\frac{1}{\cancel{2}}\frac{\cancel{2}}{\cancel{3}}\frac{\cancel{3}}{\cancel{4}}\frac{\cancel{4}}{\cancel{5}}\cdots\frac{\cancel{99}}{100}<\cdots<\frac{1}{100}\quad\Longrightarrow\quad\frac{1\cdot3\cdot5\ldots99}{2\cdot4\cdot6\ldots100}<\frac{1}{10}$$

*Segunda solución*

Tomada del libro *The USSR Olympiad problem book, de D.O. Shklarsky, N.N. Chenzov y I.M. Yaglom, Ed. W.H. Freeman and company . San Francisco and London 1962.*

Pongamos:

$$A=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\ldots\cdot\frac{99}{100};\qquad B=\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdot\ldots\cdot\frac{98}{99}.$$

Como

$$\frac{2}{3}>\frac{1}{2},\ \frac{4}{5}>\frac{3}{4},\ \frac{6}{7}>\frac{5}{6},\ldots,\frac{98}{99}>\frac{97}{98}$$

se tiene $B>A$ o, de forma equivalente, $A^2<A\cdot B$. Pero,

$$A\cdot B=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\ldots\cdot\frac{98}{99}\cdot\frac{99}{100}=\frac{1}{100}\Rightarrow A^2<A\cdot B=\frac{1}{100}\Rightarrow A<\frac{1}{10}$$

y tenemos probada la desigualdad de la derecha.

Para probar la de la izquierda, teniendo en cuenta que

$$2\cdot A=\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{7}{8}\cdot\ldots\cdot\frac{99}{100}.$$

y que

$$\frac{2}{3}<\frac{3}{4},\ \frac{4}{5}<\frac{5}{6},\ \frac{6}{7}<\frac{7}{8},\ldots,\frac{98}{99}<\frac{99}{100}$$

resulta

$$2\cdot A>B\Leftrightarrow 2A^2>A\cdot B=\frac{1}{100}\quad\text{de donde}\quad A>\frac{1}{200}=\frac{1}{10\sqrt{2}}.$$

**OME 25. Problema 4. Solución**

Comprobamos que

$$1989 = 9 \cdot 221 = 9(10^2 + 11^2) = 9(14^2 + 5^2).$$

Por lo tanto

$$1989^{2n+1} = 1989^{2n}1989 = ((1989)^n)^2 \cdot 9(10^2 + 11^2) = ((1989)^n)^2 \cdot 9(14^2 + 5^2)$$

y también

$$1989^{2n+2} = 1989^{2n}1989^2 = ((1989)^n)^2 \cdot (195^2 + 104^2) = ((1989)^n)^2 \cdot (204^2 + 85^2).$$

# OME 25. Problema 5. Solución

Si $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$, entonces
$14 = (a+b\sqrt{-13})(c+d\sqrt{-13}) = (ac-13bd)+(bc+ad)\sqrt{-13}$; y hay que resolver el sistema

$$ac - 13bd = 14$$
$$bc + ad = 0$$

Si $b = 0$ puede ser $a = 14, 7, 2, 1$ y entonces $c = 1, 7, 14, 2,$ y $d = 0$
y las soluciones son $(14 + 0 \cdot \sqrt{-13})(1 + 0 \cdot \sqrt{-13})$ y $(7 + 0 \cdot \sqrt{-13})(2 + 0 \cdot \sqrt{-13})$
Si $b \neq 0$, podemos poner $c = -\dfrac{ad}{b}$ y también, sustituyendo esta igualdad en la segunda ecuación

$$-(a^2 + 13b^2)\, d = 14.$$

Entonces el valor de $b$ solamente puede ser 1 o $-1$ y las soluciones son $(1+\sqrt{-13})(1-\sqrt{-13})$ y $(-1 + \sqrt{-13})(-1 - \sqrt{-13})$.

## OME 25. Problema 6. Solución

Pondremos $a = \tan\alpha$ y $b = \tan\beta$, y de este modo tendremos

$$\tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1 + \tan\alpha\,\tan\beta} = \frac{a-b}{1+ab}, \text{ y } \qquad |\tan(\alpha-\beta)| < \frac{1}{\sqrt{3}} = \tan\frac{\pi}{6}.$$

Esto nos dice que dados siete números reales cualesquiera, existen 7 ángulos tales que su tangente es el número dado. Como la función tangente es periódica de periodo $\pi$, es equivalente a elegirlos en un intervalo de amplitud $\pi$, por ejemplo $\left[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$; en dicho intervalo, la función tangente es creciente, y la máxima distancia entre ellos es $\frac{\pi}{7}$.

$$\frac{\pi}{7} < \frac{\pi}{6} \quad \Longrightarrow \quad \tan\frac{\pi}{7} < \tan\frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Si tenemos 6 puntos se puede obtener la igualdad. Basta para ello elegir los números

$$-\frac{5\pi}{12}, -\frac{\pi}{4}, -\frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{12}.$$

La máxima distancia entre ellos es $\frac{\pi}{6}$ y $\tan\frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}}$ .

## OME 26. Problema 1. Solución

Tenemos

$$\begin{aligned} B &= \sqrt{x}+\sqrt{y}\sqrt{1+x+2\sqrt{x}} = \\ &= \sqrt{x}+\sqrt{y}\sqrt{\left(1+\sqrt{x}\right)^2} = \\ &= \sqrt{x}+\sqrt{y}\left(1+\sqrt{x}\right) = \\ &= \sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{xy} = A. \end{aligned}$$

En lo que se refiere a la segunda parte, transformando el segundo radical de $M$ mediante lo que acabamos de hacer, obtenemos

$$\begin{aligned} M &= \sqrt{5+\sqrt{22}}+\sqrt{3+5-\sqrt{22}+2\sqrt{3}\sqrt{5-\sqrt{22}}} \\ &= \sqrt{5+\sqrt{22}}+\sqrt{3}+\sqrt{5-\sqrt{22}}, \end{aligned}$$

y si queremos compararlo con $L$ resulta que debemos comparar

$$\sqrt{10+2\sqrt{3}} \quad \text{con} \quad \sqrt{5+\sqrt{22}}+\sqrt{5-\sqrt{22}};$$

al elevar al cuadrado la suma de radicales se obtiene en efecto $10+2\sqrt{3}$, luego $L=M$.
*Observaciones.*
La primera parte del problema se puede resolver elevando al cuadrado $A$ y $B$ y viendo que $A^2=B^2$.
Otra solución se puede obtener mediante la siguiente (y monstruosa) identidad entre radicales, publicada en 1976 en la revista canadiense *CRUX MATHEMATICORUM*:

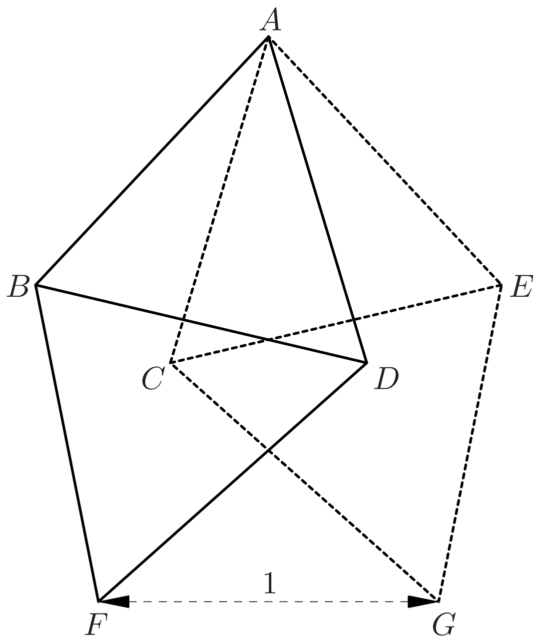
$$\begin{aligned} \sqrt{z}+\sqrt{x+2y} = & \sqrt{\frac{x}{2}+2\sqrt{\frac{(x^2-4y)}{16}}}+ \\ & +\sqrt{z+\frac{x}{2}-2\sqrt{\frac{(x^2-4y)}{16}}+2\sqrt{\frac{zx}{2}-2z\sqrt{\frac{(x^2-4y)}{16}}}}, \end{aligned}$$

de la que pueden obtenerse verdaderas preciosidades dándole a $x, y, z$ valores convenientes.

## OME 26. Problema 2. Solución

La respuesta es sí. Consideremos puntos $A, B, C, D, E, F, G$ de manera que $ABFD$ es un rombo, de lados $AB$, $AD$, $BD$, $BF$, y $FD$ de longitud 1; y $AEGC$ es también un rombo, de lados AE,AC,EC,EG y GC de longitud 1. Además unimos F con G por una arista de longitud 1.

Razonaremos por reducción al absurdo y supondremos que la propiedad no se cumple. Entonces $A$ será de color $a$, $B$ del $b$, $D$ del $c$; entonces $F$ debe estar pintado de color $a$. Análogamente se prueba que $G$ está pintado de color $a$. Pero esto es contradictorio, pues $F$ y $G$ están a distancia 1.




(Solución tomada del libro de Ioan Tomescu *Problems in Combinatory and graph theory*, ed. Wiley; el problema es original de Hadwiger, publicado en 1948 en la revista suiza *Elemente der Mathematik*.)

**OME 26. Problema 3. Solución**

Como $0 < 4 - \sqrt{11} < 1$, resulta que $0 < \left(4 - \sqrt{11}\right)^n < 1$.
Consideremos la suma

$$E = \left(4 + \sqrt{11}\right)^n + \left(4 - \sqrt{11}\right)^n ;$$

al desarrollar el segundo miembro mediante el binomio de Newton se observa que se obtiene un número par, $2k$, y al haberse obtenido sumando a $\left(4 + \sqrt{11}\right)^n$ un número menor que 1, se trata del primer entero mayor que $\left(4 + \sqrt{11}\right)^n$. Luego el entero inmediatamente anterior a éste, que es justamente la parte entera de $\left(4 + \sqrt{11}\right)^n$, es impar.

*Observación.* Hay un problema similar en *American Mathematical Monthly*, 1909, p.123.

**OME 26. Problema 4. Solución**

Poniendo

$$x = \frac{a+1}{2} + \frac{a+3}{6}\sqrt{\frac{4a+3}{3}},$$
$$y = \frac{a+1}{2} - \frac{a+3}{6}\sqrt{\frac{4a+3}{3}}$$

se obtiene que

$$x + y = a + 1, \quad xy = -\frac{a^3}{3^3}.$$

Entonces, llamando $z$ a la suma considerada, se tiene

$$z = \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y},$$

y elevando ambos miembros al cubo resulta

$$\begin{aligned} z^3 &= x + y + 3\sqrt[3]{xy}\left(\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y}\right) \\ &= a + 1 - az, \end{aligned}$$

es decir,

$$z^3 + az - (a+1) = 0$$

que admite la raiz $z = 1$, con lo cual la ecuación anterior se escribe como

$$(z-1)\left(z^2 + z + a + 1\right) = 0.$$

Pero el discriminante de $z^2+z+a+1$ es $-(3+4a) < 0$, así que ese polinomio es irreducible sobre los números reales, con lo cual $z = 1$, es decir,

$$\sqrt[3]{\frac{a+1}{2} + \frac{a+3}{6}\sqrt{\frac{4a+3}{3}}} + \sqrt[3]{\frac{a+1}{2} - \frac{a+3}{6}\sqrt{\frac{4a+3}{3}}} = 1.$$

## OME 26. Problema 5. Solución

Si ponemos $a = BC$, $b = CA$, $c = AB$, se tiene :

$$\begin{aligned} AC' &= cp, \quad BC' = c(1-p) \\ BA' &= ap, \quad CA' = a(1-p) \\ CB' &= bp, \quad AB' = b(1-p). \end{aligned}$$

Entonces

$$S_{A'BC'} = \frac{1}{2} c\,(1-p)\,ap \operatorname{sen} B = p\,(1-p)\,S,$$

y lo mismo ocurre con las áreas de los triángulos $A'B'C$ y $B'AC'$, ya que todas son iguales. Entonces

1)
$$S_{A'B'C'} = S - 3p(1-p)S = S\,[1 - 3p(1-p)]\,.$$

2) Esta área será mínima cuando $p = 1/2$, porque se trata de hacer máximo el producto de los dos factores positivos de suma es constante $p + 1 - p = 1$. Esto ocurre cuando ambos son iguales.

3) Si $C'B''$ es paralela a $BC$ (con $B''$ sobre $AC$), los triángulos $AC'B''$ y $ABC$ son semejantes, y entonces $AB'' = pb$, $C'B'' = pa$.
Si $C'A''$ es paralela a $AC$ (con $A''$ sobre $BC$), entonces los triángulos $C'A''B$ y $ABC$ son semejantes, y $BA'' = (1-p)a$.
Sea P el punto de intersección de $B''A'$ y $C'A''$ (estas rectas no pueden ser paralelas, porque son respectivamente paralelas a dos de los lados del triángulo original); entonces los triángulos $PC'B''$ y $PA'A''$ son paralelos, y se tiene

$$\frac{PA''}{PC'} = \frac{A'A''}{C'B''} = \frac{a\,(1-2p)}{ap}.$$

Sea $AM$ la mediana correspondiente al vértice $A$ del triángulo $ABC$. En los lados del triángulo $BC'A''$ consideramos los puntos $A$, $M$ y $P$. Se cumple

$$\frac{AC'}{AB} \cdot \frac{MB}{MA''} \cdot \frac{PA''}{PC'} = \frac{pc}{c} \cdot \frac{a/2}{a\left(\frac{1}{2} - p\right)} \cdot \frac{a\,(1-2p)}{pa} = 1,$$

luego por el recíproco del teorema de Menelao, esos puntos están alineados. Por lo tanto, el lugar geométrico pedido es la mediana AM.

## OME 26. Problema 6. Solución

Sea $A_0$ uno cualquiera de los $n$ puntos. Los demás serán representados por $A_1$, $A_2$, etc. Consideremos el triángulo $A_0A_1A_2$. Podemos suponer que $A_1A_2$ es el mayor lado (ya que uno de los otros dos es el más pequeño); eso significa que el ángulo del triángulo con vértice en $A_0$ es el mayor. Como no hay dos ángulos iguales, este ángulo debe ser mayor que $60°$. En efecto, si se cumplen las relaciones angulares $A = A$, $A > B$, $A > C$, sumándolas resulta $3A > 180°$.

Si $A_3$ es otro punto del conjunto, considerando el triángulo $A_0A_2A_3$ y razonando de la misma manera llegaremos a la conclusión de que el ángulo en $A_0$ en este triángulo es mayor que $60°$.

Es claro, entonces, que sólo se pueden considerar 5 triángulos con ángulos en el vértice $A_0$ mayores que $60°$, pues $6 \times 60° = 360°$.

Así, $A_0$ estará como máximo unido a los puntos $A_1, A_2, A_3, A_4$ y $A_5$.

## OME 27. Problema 1. Solución

Supongamos que los puntos $A$, $B$ y $C$ son tales que $AC$ y $AB$ forman un ángulo de $45°$, y $AB$ y $AC$ son enteros; entonces $BC = \sqrt{v}$, con $v$ entero. Según el teorema del coseno,

$$\frac{\sqrt{2}}{2} = \cos 45° = \frac{AB^2 + AC^2 - v}{2 \cdot AB \cdot AC} \in \mathbb{Q},$$

lo cual es una contradicción.
En el espacio, tomando vectores equipolentes con origen en el de coordenadas $O$, estaríamos en el caso anterior, pues $O$, con los extremos de los vectores, $A$ y $B$ , están en un plano.

**OME 27. Problema 2. Solución**

Multiplicando la primera fila por $\lambda$, la segunda por $1-\lambda$, y sumando, resulta para un elemento cualquiera la relación

$$\lambda\left(a+b^{k}\right)+(1-\lambda)\left(a^{2}+b^{k}\right)=\lambda a+a^{2}-\lambda a^{2}+b^{k}.$$

Por lo tanto, para que éste sea un elemento cualquiera de la matriz, tiene que ser

$$\lambda a+a^{2}-\lambda a^{2}=a\left[\lambda+a\left(1-\lambda\right)\right]=a^{i},$$

es decir

$$\lambda\left(1-a\right)=a^{i-1}-a,$$

de donde

$$\lambda=\frac{a\left(a^{i-2}-1\right)}{1-a}=-a\left(1+a+a^{2}+...+a^{i-3}\right).$$

Entonces si $n=3$, basta tomar $\lambda=-a$.
Si $n>3$, tenemos $\lambda=-a\left(1+a+a^{2}+...+a^{i-3}\right)$, desde $i=3$ hasta $i=n$.
El conjunto $S$ está formado, entonces, por las dos primeras filas de la matriz.

**OME 27. Problema 3. Solución**

Identificando coeficientes entre $x^3 + px^2 + qx + r$ y $(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$ se obtienen las llamadas relaciones de Cardano-Vieta entre las raíces y los coeficientes del polinomio (los primeros miembros son las funciones simétricas elementales de las raíces)

$$\begin{aligned} -x_1x_2x_3 &= r, \\ x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 &= q \\ -(x_1 + x_2 + x_3) &= p. \end{aligned}$$

Además, para que los números positivos $x_i$ puedan ser las longitudes de los lados de un triángulo se tienen que cumplir las desigualdades triangulares

$$\begin{aligned} &x_1 + x_2 - x_3 > 0, \\ &x_2 + x_3 - x_1 > 0, \\ &x_3 + x_1 - x_2 > 0; \end{aligned}$$

que pueden englobarse en una sola equivalente, multiplicándolas :

$$(x_1 + x_2 - x_3)(x_2 + x_3 - x_1)(x_3 + x_1 - x_2) > 0.$$

Es evidente que si las tres desigualdades primeras son positivas, su producto también lo es. Si el producto es positivo, puede haber o ninguno o dos factores negativos. Pero de las tres desigualdades anteriores, sólo una puede ser negativa. El problema quedará resuelto cuando consigamos expresar el primer miembro de la desigualdad anterior en términos de $p, q, r$.
Haciendo operaciones, se tiene

$$\begin{aligned} &(x_1 + x_2 - x_3)(x_2 + x_3 - x_1)(x_3 + x_1 - x_2) = \\ &= (-p - 2x_1)(-p - 2x_2)(-p - 2x_3) = -(p + 2x_1)(p + 2x_2)(p + 2x_3) = \\ &= -\big(p^3 + 2p^2(x_1 + x_2 + x_3) + 4p(x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1) + 8x_1x_2x_3 = \\ &= -(p^3 - 2p^3 + 4pq - 8r) = p^3 - 4pq + 8r > 0. \end{aligned}$$

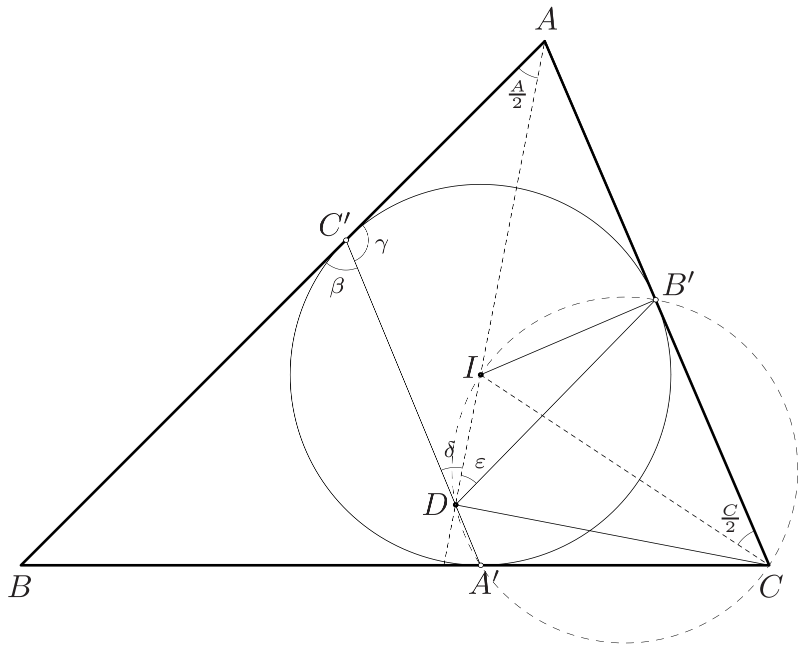
Para que se cumpla la condición del enunciado, tienen que ser positivos los números siguientes:

$$-p, q, -r \quad \text{y } p^3 - 4pq + 8r.$$

Como que los razonamientos son reversibles, las condiciones son también suficientes.

*Observación.* En el libro de Ed Barbeau *Polynomials*, Ed.Springer, 1989, p.379 se incluye una versión más general de este problema.

**OME 27. Problema 4. Solución**




El triángulo $BC'A'$ es isósceles, luego $2\beta + B = 180°$, de donde $\beta = 90° - \frac{B}{2}$. El ángulo $\gamma$ es suplementario del $\beta$ y vale $\gamma = 180° - \beta = 90° + \frac{B}{2}$. El triángulo $DC'A$ nos permite calcular el ángulo $\delta$ que vale

$$\delta = 180° - \frac{A}{2} - \beta = \frac{C}{2}.$$

La figura $AC'DB'$ es simétrica respecto de la bisectriz $AI$, luego $\varepsilon = \delta = \frac{C}{2}$.
El segmento $IB'$ se ve desde los puntos $D$ y $C$ bajo el mismo ángulo $\varepsilon = \frac{C}{2}$. Por lo tanto los puntos $I$, $C$, $B'$ y $D$ son concíclicos, con circunferencia de diámetro $IC$. Luego el ángulo $\widehat{IDC}$ es recto. Obtenemos pues,

$$\widehat{ADC} = 90°.$$

(La circunferencia que pasa por $I$, $B'$, $C$ y $D$ pasa también por el punto $A'$.)

## OME 27. Problema 5. Solución

Escribiendo los números $1, 2, ..., 2^k$ en base 2 tenemos:

$$
\begin{array}{rccccccc}
0 = & & 0 & 0 & ... & 0 & 0; & k \text{ ceros} \\
1 = & & 0 & 0 & ... & 0 & 1; & k-1 \text{ ceros} \\
2 = & & 0 & 0 & ... & 1 & 0; & k-1 \text{ ceros} \\
 & & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\
2^k - 1 = & & 1 & 1 & ... & 1 & 1 & \text{ningún cero} \\
2^k = & 1 & 0 & & 0... & 0 & 0 & k \text{ ceros}
\end{array}
$$

La suma $\sigma(k)$ es la suma total de cifras 1 que hay en el cuadro, más la correspondiente a $2^k$; en total se tiene

$$\sigma(k) = 2^{k-1} \cdot k + 1.$$

*Observación.* El enunciado es confuso ya que puede interpretarse la suma

$$\sigma(k) = s(1) + s(2) + \cdots + s(2^k)$$

como si estuviese extendida a las potencias de 2. En este caso el problema es trivial ya que $\sigma(k) = k$.

# OME 27. Problema 6. Solución

Tenemos

$$\frac{1}{\sqrt{k}} = \frac{2}{2\sqrt{k}} > \frac{2}{\sqrt{k}+\sqrt{k+1}} = 2(\sqrt{k+1}-\sqrt{k}), \quad k \geq 1, \quad \text{luego}$$

$$\begin{aligned} S = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{10000}} &> \\ > 2(\sqrt{2}-\sqrt{1}+\sqrt{3}-\sqrt{2}+\ldots+\sqrt{10001}-\sqrt{10000}) &= \\ = 2(\sqrt{10001}-1) > 2\cdot 99 &= 198. \end{aligned}$$

Por otro lado,

$$\frac{1}{\sqrt{k}} = \frac{2}{2\sqrt{k}} < \frac{2}{\sqrt{k}+\sqrt{k-1}} = 2(\sqrt{k}-\sqrt{k-1}), \quad k \geq 2, \quad \text{luego}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{10000}} &< \\ < 2(\sqrt{2}-\sqrt{1}+\sqrt{3}-\sqrt{2}+\ldots+\sqrt{10000}-\sqrt{9999}) &= \\ = 2(\sqrt{10000}-1) &= 198. \end{aligned}$$

Luego

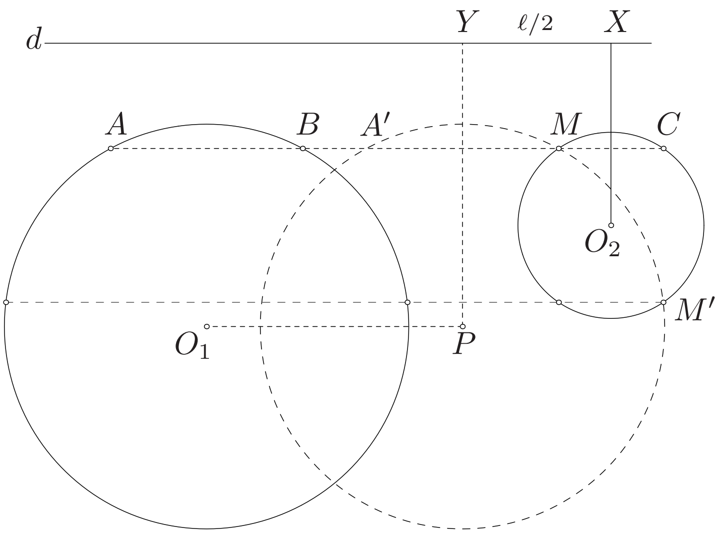
$$S = \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{10000}} < 1 + 198 = 199;$$

Por tanto tenemos que $198 < S < 199$, es decir su parte entera es 198.

**OME 28. Problema 1. Solución**

Supongamos $N = 2^k \cdot 3^p \cdot 5^q \cdots 83^r$. Entonces $N^2 = 2^{2k} \cdot 3^{2p} \cdot 5^{2q} \cdots 83^{2r}$, con $r \neq 0$.
Debe ser $63 = (2k+1)(2p+1)(2q+1)\cdots(2r+1)$, pero las únicas descomposiciones de 63 son 63, $7 \cdot 9$ y $7 \cdot 3 \cdot 3$.
En el primer caso debe ser $r = 31$ y $N = 83^{31}$.
En el segundo caso debe ser $k = 4$, $r = 3$ y sale $N = 2^4\, 83^3$. (Si hacemos $k = 3$ y $r = 4$ obtenemos un número mayor).
En el tercer caso es $k = 3$, $p = 1$, $r = 1$, de donde sale $N = 2^3\, 3^1\, 83^1$ (las demás combinaciones de exponentes dan números mayores, ya que $2^3 \cdot 3 < 2 \cdot 3^3$).
De los tres números obtenidos, el menor es el último y por lo tanto el número buscado es $N = 2^3 \cdot 3 \cdot 83$.

## OME 28. Problema 2. Solución




Podemos suponer que la dirección dada es horizontal y viene dada por la recta $d$.
Pongamos $O_1$ y $O_2$ para los centros de las circunferencias de radios $r$ y $r$' respectivamente.
Proyectamos $O_2$ perpendicularmente sobre $d$ en $X$
Trasladamos $X$ paralelamente a $d$ una distancia $\frac{\ell}{2}$ en el sentido $O_2O_1$ y así determinamos $Y$.
La perpendicular por $Y$ a $d$ y la paralela por $O_1$ a $d$ determinan $P$.
Trasladamos la circunferencia de centro $O_1$ mediante el vector $O_1P$.
La circunferencia trasladada (de puntos en la figura) corta eventualmente a la de centro $O_2$ en dos puntos $M$ y $M'$.
Por cada intersección situada en el mismo semiplano que $Y$ respecto de $O_2X$ tenemos una solución (en la figura el punto $M$) como se comprueba en la figura de modo inmediato.

*Observación.* Si existe alguna intersección en el mismo semiplano ($M$' en la figura), se obtienen cuerdas cuya diferencia mide $\ell$.

**OME 28. Problema 3. Solución**

Sea $T_n$ el $n$-ésimo número triangular

$$T_n = 1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Si $n > m$ se cumple

$$T_n - T_m = (m+1) + (m+2) + \cdots + (n+1) + n \geq m + 1$$

La igualdad

$$(a+b)^2 + 2a + b = (c+d)^2 + 2c + d$$

la escribimos en la forma equivalente

$$(a+b)^2 + (a+b) + a = (c+d)^2 + (c+d) + c$$

o bien

$$(a+b)\big((a+b)+1\big) + a = (c+d)\big((c+d)+1\big) + c \quad \text{o bien} \quad 2T_{a+b} + a = 2T_{c+d} + c,$$

que se puede escribir

$$2(T_{a+b} - T_{c+d}) = c - a. \qquad (*)$$

Si suponemos $a + c > c + d$, tenemos

$$c - a = 2(T_{a+b} - T_{c+d}) \geq 2(c + d + 1) \quad \text{o bien} \quad \frac{c-a}{2} \geq c + d + 1$$

lo que es absurdo si los enteros son positivos y $a + b \neq c + d$. El caso $a + b < c + d$ sale análogamente.

Supongamos ahora

$$(a+b)^2 + 3a + b = (c+d)^2 + 3c + d.$$

Operando como antes, la igualdad (*) queda convertida en

$$T_{a+b} - T_{c+d} = c - a.$$

de donde

$$c - a = T_{a+b} - T_{c+d} \geq c + d + 1$$

que es absurdo tanto si $a + b > c + d$ como si $a + b < c + d$.

Si ponemos

$$(a+b)^2+4a+b=(c+d)^2+4c+d,$$

la igualdad (*) se convierte en

$$2(T_{a+b}-T_{c+d})=3(c-a)$$

o bien

$$3(c-a)=2(T_{a+b}-T_{c+d})\geq 2(c+d) \text{ o bien } \frac{3}{2}(c-a)\geq c+d$$

que es una desigualdad que se puede cumplir en algunos casos. Por ejemplo,

$$2(T_9-T_8)=2(45-36)=18=3\cdot 6=3(7-1)$$
$$2\,T_{8+1}+3\cdot 1=2\,T_{7+1}+3\cdot 7$$

que nos dice que para $a=1$, $b=8$, $c=7$ y $d=1$ sale

$$(1+8)^2+4\cdot 1+4=(7+1)^2+4\cdot 7+1.$$

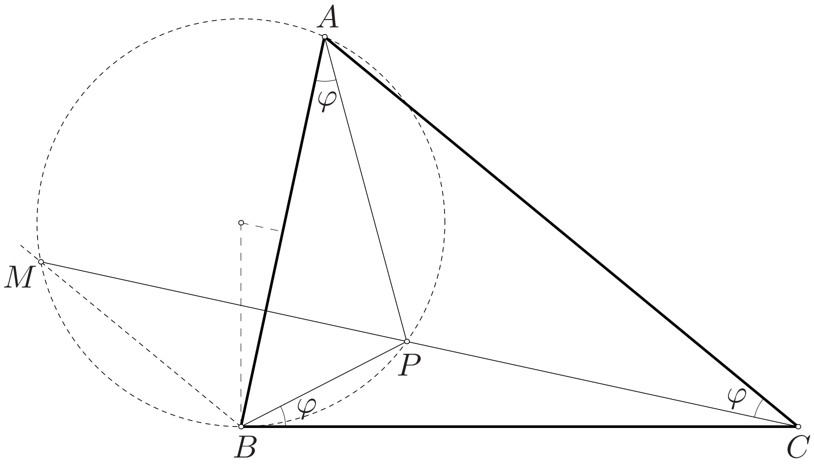
**OME 28. Problema 4. Solución**

Demostrar que en la sucesión

$$3, 7, 11, 15, \ldots, 4n + 3, \ldots.$$

hay infinitos primos es lo mismo que probar que hay infinitos primos de la forma $4n + 3$.
Para demostrarlo, utilizamos el hecho de que el producto de dos números de la forma $4n+1$ es a su vez de la misma forma pues $(4n_1 + 1)(4n_2 + 1) = (4n_3 + 1)$.
Sea $q = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot p - 1$, siendo $2, 3, 5, \ldots, p$ todos los números primos hasta llegar a $p$.
Entonces $q$ es de la forma $4n - 1$ o bien $4n + 3$, y no es divisible por ningún número primo menor o igual que $p$.
Si $q$ es un número primo ya hemos acabado.
Si $q$ es un número compuesto quiere decir que hay primos mayores que $p$ que dividen a $q$.
Si todos fuesen de la forma $4n + 1$, su producto también lo sería, y $q$ no lo es, de forma que alguno tiene que ser de la forma $4n + 3$.
En los dos casos demostramos que dado un conjunto finito de primos, existe un primo mayor que ellos de la forma $4n + 3$. Luego el conjunto de primos de esta forma es infinito.

**OME 28. Problema 5. Solución**




Pongamos $\varphi = \widehat{PAB} = \widehat{PBC} = \widehat{PCA}$.
La determinación de $P$ se hace en los siguientes pasos:
1) Se traza la circunferencia pasando por $A$ y tangente en $B$ al lado $BC$.
2) La paralela por $B$ al lado $AC$ corta en $M$ a la circunferencia anterior.
3) La intersección de la recta $CM$ con la circunferencia determina $P$.
En efecto, $\widehat{PAB} = \widehat{PBC} = \widehat{PCA}$ por ángulos inscritos en el mismo arco y por ser $MB$ paralela a $AC$.

Para la segunda parte, por el teorema de los senos en $APC$ tenemos:

$$\frac{\operatorname{sen}(A-\varphi)}{\operatorname{sen}\varphi} = \frac{CP}{AP}$$

Por el mismo teorema en $APC$ y $BPC$ se cumple:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\operatorname{sen}\varphi}{AP} = \dfrac{\operatorname{sen} A}{b} \\ \dfrac{\operatorname{sen}\varphi}{CP} = \dfrac{\operatorname{sen} C}{a} \end{array}\right\}, \quad \text{y dividiendo resulta} \quad \frac{CP}{AP} = \frac{a \operatorname{sen} A}{b \operatorname{sen} C}$$

además

$$\frac{a}{b} = \frac{\operatorname{sen} A}{\operatorname{sen} B} \quad \text{implica que} \quad \frac{CP}{AP} = \frac{\operatorname{sen}^2 A}{\operatorname{sen} B \operatorname{sen} C}$$

y sustituyendo en (*) resulta

$$\frac{\operatorname{sen}(A-\varphi)}{\operatorname{sen}\varphi} = \frac{\operatorname{sen}^2 A}{\operatorname{sen} B \operatorname{sen} C}$$

dividiendo por $\operatorname{sen} A$, poniendo $\operatorname{sen} A = \operatorname{sen}(B+C)$ y desarrollando queda

$$\frac{\operatorname{sen} A \cos\varphi - \cos A \operatorname{sen}\varphi}{\operatorname{sen} A \operatorname{sen}\varphi} = \frac{\operatorname{sen} B\ \cos C + \cos B \operatorname{sen} C}{\operatorname{sen} B \operatorname{sen} C} \Longleftrightarrow \cot\varphi - \cot A = \cot C + \cot B$$

y la relación pedida es

$$\cot\varphi = \cot A + \cot B + \cot C.$$

**OME 28. Problema 6. Solución**

Como $z = \cos t + i \operatorname{sen} t$, sustituyendo en la igualdad resulta la ecuación trigonométrica

$$\cos^n t = \cos nt,$$

que para $n = 2, 3, 4$ tiene las soluciones

$$\begin{aligned} &n = 2, \qquad S(n) = \{1, -1\} \\ &n = 3, \qquad S(n) = \{1, -1, i, -i\} \\ &n = 4, \qquad S(n) = \{1, -1, \cos t + i \operatorname{sen} t\}, \quad t = \arctan(\pm\sqrt{6}) \end{aligned}$$

$S(4)$ tiene 6 elementos.
Como para cada valor de $\cos t$ hay dos valores de $\operatorname{sen} t$ que resuelven la ecuación, una cota superior del número de elementos de $S(n)$ es $2n - 2$.

**OME 29. Problema 1. Solución**

Si en cada grupo de 6 personas, 2 son de la misma edad, sólo puede haber 5 edades diferentes, ya que, si hubiese 6 edades diferentes, eligiendo una persona de cada edad tendríamos 6 personas de edades distintas contra la hipótesis.
Como $201 = 2 \cdot 100 + 1$, debe haber al menos 101 personas del mismo sexo.
Como $101 = 5 \cdot 20 + 1$, debe haber al menos 21 personas de la misma edad y sexo.
Y finalmente, como $21 = 4 \cdot 5 + 1$, debe haber al menos 5 personas de la misma nacionalidad, edad y sexo.

También puede argumentarse de la manera siguiente: A cada persona le asignamos un carnet de identidad con tres casillas, una para el sexo, una para la nacionalidad, y otra para la edad. Como hay 2 sexos posibles, 5 edades posibles y 5 nacionalidades posibles, hay en total 50 carnets de identidad posibles. Puesto que en el conjunto hay 201 personas, por lo menos 5 de ellas tiene el mismo carnet de identidad, es decir, el mismo sexo, la misma edad y la misma nacionalidad.

## OME 29. Problema 2. Solución

*Primera solución*

Vamos a sumar los elementos de cada fila y llamaremos $S_i$ a la suma de los elementos de la fila $i$.

$$\begin{aligned} S_1 &= \frac{0+1993}{2}1994 = 997 \cdot 1993 \\ S_2 &= 2S_1 - (0+1993) = \dot{1993} \\ S_3 &= 2S_2 - (0+1993) = \dot{1993} \\ &\dots \\ S_{1994} &= 2S_{1993} - (0+1993) = \dot{1993} \end{aligned}$$

Podemos calcular cada suma recursivamente:

$$S_2 = 2\,S_1\frac{1993}{1994}, \quad S_3 = 2\,S_2\frac{1992}{1993} = 2^2\,S_1\frac{1992}{1994}, \dots ,$$

$$\dots ,\ S_{1994} = 2^{1993}\,S_1\frac{1}{1994} = 2^{1992}\,1993 = \dot{1993}$$

*Segunda solución*

La suma total es

$$S_{1993} = 0\binom{1993}{0} + 1\binom{1993}{1} + 2\binom{1993}{2} + \cdots + 1993\binom{1993}{1993}.$$

Si ponemos

$$f(x) = 1\binom{n}{1} + 2x\binom{n}{2} + \cdots + nx^{n-1}\binom{n}{n}$$

resulta que la primitiva de $f(x)$ es

$$F(x) = x\binom{n}{1} + x^2\binom{n}{2} + \cdots + x^n\binom{n}{n} = (1+x)^n - 1$$

de donde

$$f(x) = n(1+x)^{n-1} \quad \text{y} \quad f(1) = 2^{n-1}n.$$

## OME 29. Problema 3. Solución

*Primera solución*

El área en función del radio de la circunferencia inscrita es $S = \dfrac{(a+b+c)r}{2}$, de donde $r = \dfrac{2S}{a+b+c}$.

El área en función del radio de la circunferencia circunscrita es $S = \dfrac{abc}{4R}$, de donde $R = \dfrac{abc}{4S}$.

Tenemos que probar que $\dfrac{4S}{a+b+c} \leq \dfrac{abc}{4S}$, es decir $16S^2 \leq (a+b+c)abc$

De la fórmula de Herón tenemos que $16S^2 = (a+b+c)(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a)$.

Tendremos el resultado si probamos que $(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a) \leq abc$, pero es evidente que $(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a) \leq \left(\dfrac{a+b+c}{3}\right)^3$ y sin más que utilizar la desigualdad de las medias, y aplicando otra vez la misma desigualdad $\dfrac{a+b+c}{3} \leq \sqrt[3]{abc}$ tenemos la desigualdad buscada.

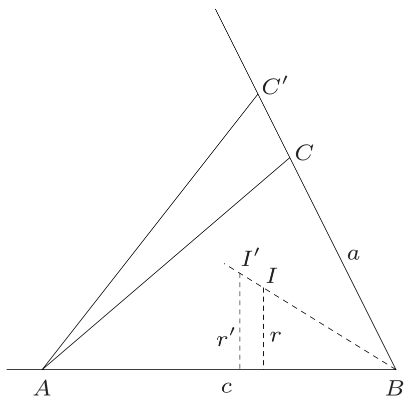
*Segunda solución*

Esta solución es un razonamiento puramente geométrico que se formula en diversas fases.

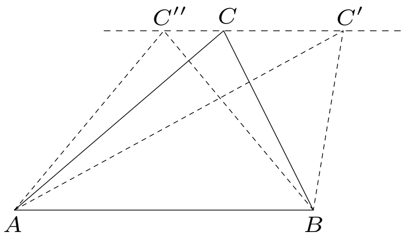
*Lema 1.*- En un triángulo equilátero se cumple $R = 2r$.

*Lema 2.*- Si en un triángulo $ABC$ fijamos la base $AB$ y la recta que contiene el lado $a$ , es decir, el ángulo $B$, y aumentamos el ángulo $A$ (o lo que es lo mismo, el lado $a$), el radio $r$ aumenta con $A$.

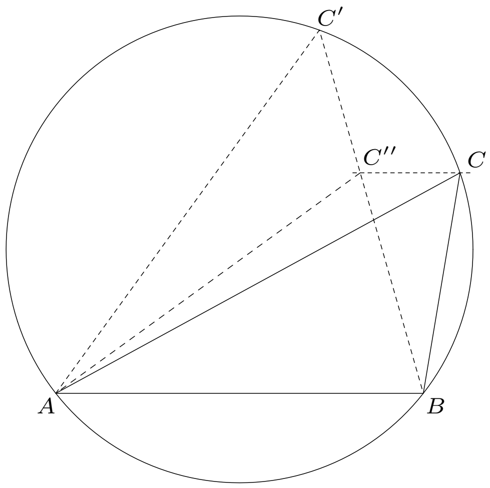
En efecto, la bisectriz del ángulo $B$ se mantiene constante al mover $C$ y el radio $r$ aumenta con la longitud del lado $a$. El mismo razonamiento se puede hacer si el ángulo $B$ es obtuso.



*Lema 3.*- Si en un triángulo $ABC$ mantenemos la base $AB$ fija y movemos el vértice $C$ sobre una paralela a la base, el radio $r$ será máximo cuando el triángulo sea isósceles.
En efecto, el área del triángulo se mantiene constante, y como es $S = pr$, el radio $r$ será máximo si $p$ es mínimo, es decir, el triángulo es isósceles.




*Lema 4.*- Si dos triángulos comparten base y círculo circunscrito, el más cercano a isósceles es el que tiene mayor radio inscrito $r$. Trazamos la paralela a la base y obtenemos el punto $C''$. Podemos pasar del triángulo $ABC$ al $ABC'$ en dos fases: primero al $ABC''$, y por el Lema 3 el radio $r$ aumenta, y después al $ABC'$, y por el Lema 2 el radio $r$ también aumenta.




*Tercera solución*

Con la misma notación de antes para los radios de las circunferencias inscrita y circunscrita, si $d$ es la distancia entre el incentro y el circuncentro, la conocida fórmula de Euler nos dice que

$$d^2 = R^2 - 2Rr = r(R - 2r) \geq 0, \quad \text{de donde} \quad R \geq 2r.$$

**OME 29. Problema 4. Solución**

Si consideramos las clases de restos módulo $p$, entre las potencias $10^0$, $10^1$, $10^2$, ... ,$10^{p-1}$, tiene que haber al menos 2 que pertenezcan a la misma clase. La clase 0 no puede aparecer pues $p$ es distinto de 2 y de 5. Sean esas potencias $10^a$ y $10^b$ y supongamos $b > a$.
$10^a = p \cdot q + r$, y $10^b = p \cdot q' + r$; por lo tanto: $10^b - 10^a = p(q' - q)$ o bien $10^a(10^k - 1) = p(q' - q)$. Como $p$ es distinto de 2 y de 5, $p$ es primo con $10^a$, y por lo tanto $p|(10^k - 1)$. Si $p \neq 3$, entonces $p|111\ldots1$, y si $p = 3$, existe el número 111, que es múltiplo de 3. Es decir, al menos hay un múltiplo que cumple las condiciones exigidas.
Pero si el número $M$ formado por $k$ unos es múltiplo de $p$, también lo será el número $M' = M10^k + M = M(10^k + 1)$, y el número $M'' = M'(10^{2k} + 1)$, y así sucesivamente.

## OME 29. Problema 5. Solución

Las posibles distancias son:
$1, 2, 3, \sqrt{2}, \sqrt{5}, \sqrt{8}, \sqrt{10}, \sqrt{13}$;
las posibles distancias de $B$ a $A$ son $1, 2, 3, \sqrt{2}, \sqrt{5}, \sqrt{10}, \sqrt{8}, \sqrt{13}$,
y las distancias de $B$ a $D$ son $\sqrt{13}, \sqrt{10}, 3, \sqrt{8}, \sqrt{5}, \sqrt{2}, 2, 1$
Las posibles coordenadas de $B$ son:
$(1,0), (0,1), (2,0), (0,2), (1,1), (2,2), (3,1), (1,3), (3,2), (2,3)$; las simetrías que nos proporcionan las dos diagonales nos permiten reducir el estudio a tres posiciones de $B$, $(1,0), (2,0), (1,1)$.
Si $B$ es $(1,0)$ entonces $C$ pueda estar en $(0,2), (2,2), (3,1), (1,3)$. En los otros casos no aparece ninguna figura distinta. Por tanto sólo hay 4 figuras posibles. Teniendo en cuenta las dos simetrías anteriores, por cada una de las figuras tenemos otras tres, y por tanto hay 16 figuras que cumplen las condiciones.
Observemos que $A(0,0)$ y $D(3,3)$ son siempre los mismos. Si utilizamos una relación vectorial $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}$
$\overrightarrow{AD} = (3,3)$ y $\overrightarrow{BC} = (x,y)$. La suma pedida es: $9 + 9 + |x| + |y|$, observando las cuatro figuras anteriores se tiene que $|x| + |y| = 3$, que se mantiene en todas las simetrías por lo que la suma constante es 21.

## OME 29. Problema 6. Solución

Partiendo de $S$, la probabilidad de llegar a $C$ o a $D$ es $\frac{2}{3}$; una vez en $C$ o en $D$, la probabilidad de ganar es igual que la de perder, $\frac{1}{2}$. Por tanto, partiendo de $S$, la probabilidad de ganar es $\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{3}$.
Del análisis del juego se deduce que acabará en un número par de movimientos.
La probabilidad que el juego acabe en dos tiradas es $\frac{1}{3}$, la de que acabe en cuatro tiradas es $\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3}$, la de que acabe en seis $\frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3}$, etc.
Y la duración media será

$$
\begin{aligned}
d = 2 \cdot \frac{2}{3} + 4 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} + 6 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} + \ldots = \\
= \left[\frac{2}{3} + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^3 + \ldots\right] + \left[\frac{2}{3} + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^3 + \ldots\right] + \\
+ \left[\frac{2}{3} + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^3 + \ldots\right] + \left[\frac{2}{3} + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^3 + \ldots\right] + \ldots = \\
= \frac{2/3}{1/3} + \frac{(2/3)^2}{1/3} + \frac{(2/3)^3}{1/3} + \ldots = \frac{2}{1/3} = 6.
\end{aligned}
$$

La probabilidad P de ganar también se puede calcular sumando las probabilidades de ganar según la duración de la jugada, es decir

$$P = \frac{2}{3^2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{2^2}{3^3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{2^3}{3^4} \cdot \frac{1}{2} \ldots = \frac{1}{3^2} + \frac{2}{3^3} + \frac{2^2}{3^4} \ldots = \frac{1}{3}.$$

# OME 30. Problema 1. Solución

Bastará probar que a partir de un cuadrado perfecto podemos construir otro. Sea la progresión:

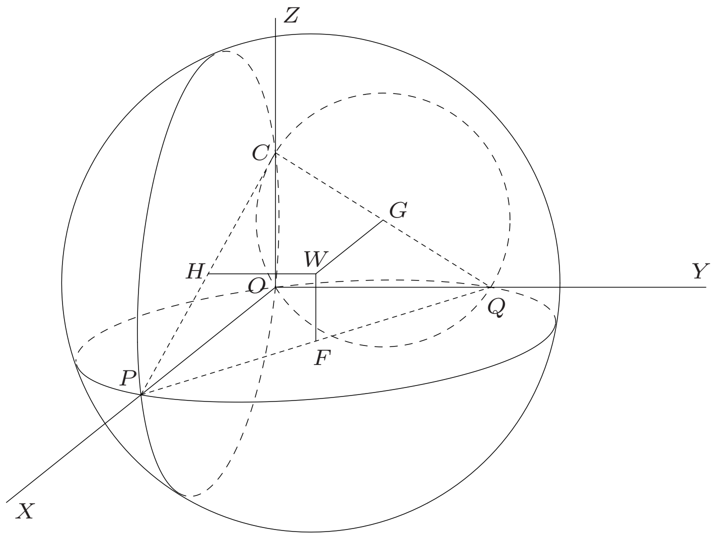
$$a^2, a^2 + d, a^2 + 2d, \dots , a^2 + kd \dots$$

Como $(a + d)^2 = a^2 + 2ad + d^2 = a^2 + (2a + d)\, d$, basta tomar $k = 2a + d$ para obtener otro cuadrado en la progresión.

## OME 30. Problema 2. Solución

En la figura se muestran con trazo discontinuo las circunferencias que resultan de intersecar la esfera con los planos coordenados. Las proyecciones del centro $W$ de la esfera sobre estos planos coinciden con los centros de estas circunferencias (denotados $F, G$ y $H$ en la figura) y al ser el triedro trirrectángulo, $F$, $G$ y $H$ están en los puntos medio de los segmentos $PQ$, $QC$ y $CP$ que son diámetros de sus circunferencias.
Parametrizando con la distancia $OP = \lambda$ tenemos trivialmente en la referencia $OXYZ$ la siguientes coordenadas:

$$P\,(\lambda,\,0,\,0)\,;\quad Q\,(0,\,k-\lambda,\,0)\,;\quad C\,(0,\,0,\,c)$$




$$F\,\left(\frac{\lambda}{2},\frac{k-\lambda}{2},0\right)\,;\;G\,\left(0,\frac{k-\lambda}{2},\frac{c}{2}\right)\,;\;H\,\left(\frac{\lambda}{2},0,\frac{c}{2}\right)\,;\;W\,\left(\frac{\lambda}{2},\frac{k-\lambda}{2},\frac{c}{2}\right)$$

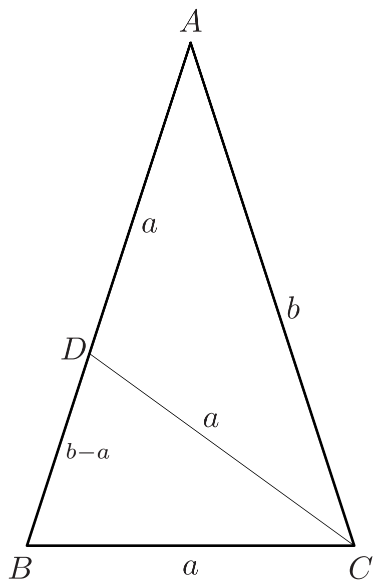
El lugar de $F$ es la recta $x+y=\frac{k}{2}$ del plano $XOY$. El lugar de $W$ es una recta paralela a la anterior situada en el plano $z=\frac{c}{2}$, y más concretamente es la intersección de los planos:

$$\begin{cases} x+y=\dfrac{k}{2} \\ \quad\;\; z=\dfrac{c}{2} \end{cases}$$

## OME 30. Problema 3. Solución

Al suprimir una región, la suma de días soleados o lluviosos de las restantes ha de ser múltiplo de 4. Esta suma vale 1994 para las seis regiones, valor que dividido entre 4 da resto 2. El único dato de esta columna que da resto 2 al dividirlo entre 4 es 330 correspondiente a la región F. Suprimiendo esta región quedan entre las cinco restantes 416 días lluviosos y $3 \cdot 416 = 1248$ días soleados.

**OME 30. Problema 4. Solución**




Con los datos del enunciado tenemos
en el triángulo $ABC$, $\widehat{BAC} = 36°$; $\widehat{ABC} = \widehat{ACB} = 72°$,
en el triángulo $CBD$, $\widehat{BCD} = 36°$; $\widehat{CDB} = \widehat{BDC} = 72°$
en el triángulo $ADC$, $\widehat{DAC} = \widehat{ACD} = 72°$; $\widehat{ADC} = 108°$.
Por tanto, los triángulos $BCD$ y $ADC$ son isósceles y además $BCD$ es semejante al $ABC$.
Para los lados se tiene: $DC = AD = a$; $BD = b - a$.
Expresando la proporcionalidad derivada de la semejanza anterior tenemos las equivalencias:

$$\frac{b-a}{a} = \frac{a}{b} \iff a^2 = b^2 - ab \iff a^2 + ab - b^2 = 0 \iff \left(\frac{a}{b}\right)^2 + \frac{a}{b} - 1 = 0.$$

y resolviendo queda

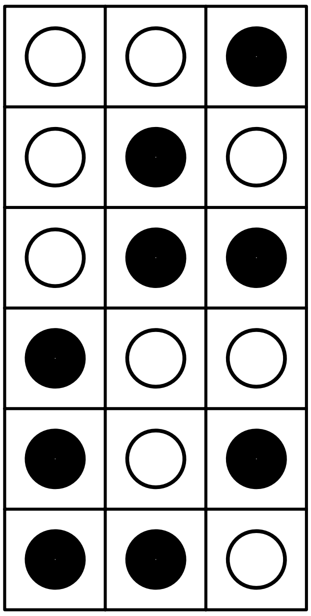
$$\frac{a}{b} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

o bien

$$a = \frac{\left(\sqrt{5}-1\right)b}{2}$$

es decir que $a$ es la sección áurea de $b$.

**OME 30. Problema 5. Solución**



Dispondremos el tablero en posición vertical, es decir, con 7 filas y 3 columnas. Asignaremos el color blanco a la cifra 0 y el negro a la cifra 1. De este modo cada fila representa un número escrito en base 2.

En primer lugar es fácil ver que si en una fila se colocan todas las fichas del mismo color, por ejemplo el negro, necesariamente habrá un rectángulo ya que no podemos colocar en ninguna fila dos fichas negras y sólo podemos llenar un máximo de 5 filas en total sin formar rectángulo.

Por otra parte si dos números son iguales sus filas forman rectángulo, luego todas las filas han de representar números distintos. Por la consideración anterior hemos de excluir los números 000 y 111. Con tres cifras en base dos existen $2^3 = 8$ números distintos, quitando los anteriores quedan 6 para 7 filas por lo que necesariamente hemos de repetir y formar rectángulo. El problema tendría solución en un tablero de 3 x 6 tal como se muestra en la figura.

## OME 30. Problema 6. Solución

Como hay $m$ triángulos, hay $3m$ lados; de ellos $3m-n$ son interiores, y como un lado interior pertenece a dos triángulos, hay $\dfrac{3m-n}{2}$ lados interiores distintos. En particular $3m-n$ es par, luego $m$ y $n$ tienen la misma paridad y $m+n$ es par.
Supongamos que el número de vértices $v$ sólo depende de $m$ y $n$. Razonemos por inducción sobre $v$.
Si no hay ningún vértice interior ($v=0$), uniendo un vértice del polígono con los otros, se divide en $n-2=n+2v-2$ triángulos.
Supongamos que hay $v$ vértices interiores y $n+2v-2$ triángulos. Al añadir un vértice hay dos posibilidades:
a) El vértice está en el interior de un triángulo, y para que se cumplan las condiciones del enunciado, debe unirse a cada uno de los tres vértices del triángulo que se divide en tres y el número de triángulos ahora es:

$$n+2v-2+2=n+2\,(v+1)-2.$$

b) El vértice está en un lado, y entonces hay que unirlo con el vértice opuesto de cada uno de los dos triángulos que comparten ese lado, cada triángulo se descompone en dos y el número de triángulos es ahora:

$$n+2v-2+2=n+2\,(v+1)-2$$

En conclusión,

$$m=n+2v-2, \quad \text{de donde} \quad v=\frac{m-n+2}{2}.$$

## OME 31. Problema 1. Solución

Sea $A$ un conjunto que cumpla las condiciones del enunciado. Queremos calcular la suma de los perímetros de los triángulos, y lo haremos por dos procedimientos distintos.

*Primer procedimiento*

Sea $k \in A$ y contemos el número de triángulos que tienen lado $k$, y su contribución a la suma de perímetros.
Hay un solo triángulo equilátero de lado $k$, y contribuye con el valor $3k$.
Hay 99 triángulos isósceles de lados $k, r, r,\ (k \neq r)$ y el lado $k$ contribuye con $99k$.
Hay 99 triángulos isósceles de lados $k, k, r,\ (k \neq r)$ y el lado $k$ contribuye con $2 \cdot 99\, k$.
Hay $\binom{99}{2} = 99{\cdot}49$ triángulos escalenos de tipo $k, r, s$ (con $k$, $r$, $s$ distintos), y su contribución es $99 \cdot 49k$.
En total, la contribución de $k \in A$ es de

$$k(3 + 99 + 2 \cdot 99 + 49 \cdot 99) = 5151\, k.$$

*Segundo procedimiento*

Debemos escoger de $A$ tres elementos con posibles repeticiones. El número total de formas de hacerlo corresponde al número de combinaciones con repetición de 100 elementos tomados 3 a tres,

$$\mathbf{CR}^3_{100} = \binom{100+3-1}{3} = \binom{102}{3} = \frac{102 \cdot 101 \cdot 100}{6}, \quad \text{triángulos,}$$

que corresponden a

$$\frac{102 \cdot 101 \cdot 100}{6}\, 3 \ \ \text{lados,}$$

y como que hay 100 valores posibles para los lados, cada uno de ellos aparece

$$\frac{102 \cdot 101}{6}\, 3 = 5151.$$

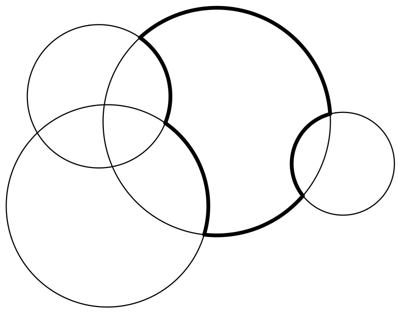
En ambos procedimientos, acabamos el problema observando que la suma de perímetros será por tanto $5151\, S(A)$, donde $S(A)$ indica la suma de elementos de $A$, suma que debemos hacer mínima.
Sean ahora $a$ y $c$ el mínimo y el máximo de $A$. El triángulo $caa$ debe ser no oblicuángulo, luego $c^2 \leq 2a^2$. Si para hacer mínimo $S(A)$ exigimos que los elementos de $A$ sean consecutivos, será $c = a + 99$ y resulta $a + 99 \leq \sqrt{2}\, a$, o bien $a \geq 240$. El conjunto es

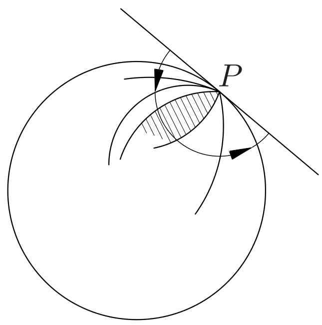
$$A = \{240, 241, 242, \ldots, 338, 339\}$$

cuya suma es 28950, y la suma de perímetros mínima es $5151 \cdot 28950 = 149\,121\,450$.

**OME 31. Problema 2. Solución**

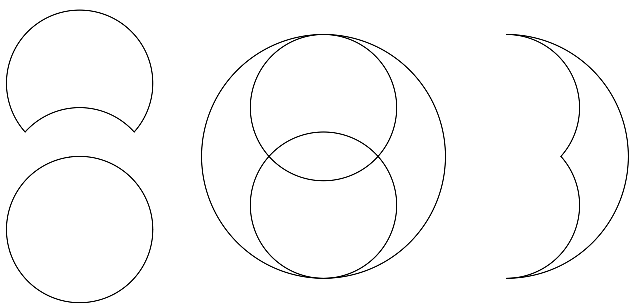
La frontera de las piezas recortadas (que no sean círculos completos) está formada por arcos cóncavos y convexos (vistos desde fuera) que se cortan en puntos que llamaremos vértices. En un vértice pueden concurrir dos arcos cóncavos o uno cóncavo y otro convexo, pero nunca dos convexos ya que éstos únicamente provienen de la frontera de los círculos iniciales. Además, los ángulos que forman los arcos en cada vértice no son de $0°$ ni de $180°$ ya que excluimos las tangencias interiores.





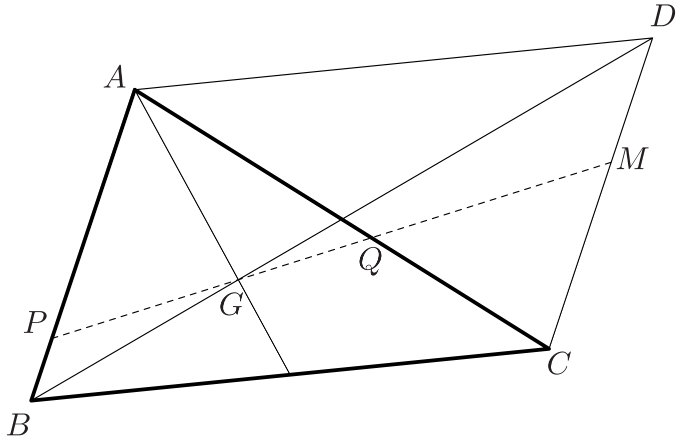

Supongamos que tenemos un círculo obtenido ensamblando piezas recortadas. Existe al menos un punto $P$ de la frontera de dicho círculo en el que concurren tres o más arcos de la frontera de las pieza ensambladas ($P$ es vértice de dos o más piezas). La tangente al círculo en $P$ deja a todos los arcos en un mismo semiplano. Elegido un sentido de rotación en $P$ a partir de la tangente, y avanzando en este sentido, el primer arco que encontramos es convexo y el último cóncavo. Por lo tanto es necesario que existan dos arcos consecutivos uno convexo y el otro cóncavo los cuales forman parte de la frontera de una de las piezas ensambladas. Como el arco que forman dichas piezas no puede ser ni $0^o$ ni $180^o$, el punto P es un vértice de la pieza. Esto es contradictorio pues en ningún vértice pueden concurrir dos arcos convexos vistos desde fuera.

*Observación.* Hay que entender en el enunciado que quedan excluidas las tangencias interiores. De no ser así pueden encontrarse contraejemplos como el "despiece" que se muestra en la figura:



**OME 31. Problema 3. Solución**

Dupliquemos el triángulo trazando $AD$ paralela a $BC$ y $CD$ paralela a $BA$ como muestra la figura, y tomemos la longitud del lado $AB$ como unidad. Llamando $M$ a la intersección de $CD$ con la recta $PQ$ y $x = PB$, $1 - x = AP$, tenemos




Por la semejanza de los triángulos $AQP$ y $QMC$ sale $\dfrac{QC}{QA} = \dfrac{MC}{AP} = \dfrac{MC}{1-x}$.

Por la semejanza de los triángulos $GPB$ y $GMD$ queda $\dfrac{PB}{MD} = \dfrac{GB}{GD} = \dfrac{1}{2}$.

Luego $MD = 2x$ y $MC = 1 - 2x$.

Sustituyendo en el primer miembro de la relación del enunciado queda la cadena de condiciones equivalentes

$$\frac{PB}{PA} \cdot \frac{QC}{QA} \leq \frac{1}{4} \Longleftrightarrow \frac{x(1-2x)}{(1-x)^2} \leq \frac{1}{4} \Longleftrightarrow 9x^2 - 6x + 1 \geq 0 \Longleftrightarrow (3x-1)^2 \geq 0,$$

relación válida para cualquier $x$.

La igualdad se alcanza para $PB = x = \frac{1}{3}$, es decir para $MC = \frac{1}{3}$ o bien cuando $PQ$ es paralela al lado $BC$.

**OME 31. Problema 4. Solución**

Ya que $p$ es primo, es distinto de 0 y de 1. De la ecuación resulta que $p$ divide a $x$ o $p$ divide a $y$. Como la ecuación es simétrica respecto de $x$ e $y$, si el par $(\alpha, \beta)$ es solución, también lo será el par $(\beta, \alpha)$.
Si $p$ divide a $x$, debe ser $x = p{\cdot}a$, $(a \in \mathbb{Z})$ y la ecuación se puede poner como $p(p\,a+y) = pay$, de donde $pa + y = ay$ y

$$y = \frac{pa}{a-1}, \quad \text{ya que } a \text{ es entero.}$$

Además, $a$ y $a-1$ son primos entre sí, luego $a-1$ divide a $p$. Al ser $p$ primo sólo hay cuatro posibilidades: $a-1 = \pm 1$ y $a-1 = \pm p$.
Examinemos todos los casos.

i) $a-1 = -1$, entonces $a = 0$, $x = 0$, $y = 0$.

ii) $a-1 = 1$, entonces $a = 2$, $x = 2p$, $y = \dfrac{2p}{2-1} = 2p$.

iii) $a-1 = p$, entonces $a = p+1$, $x = p(p+1)$, $y = \dfrac{p\,(p+1)}{p+1-1} = p+1$ .

iiii) $a-1 = -p$, entonces $a = 1-p$, $x = p(1-p)$, $y = \dfrac{p\,(1-p)}{1-p-1} = p-1$ .

En resumen las soluciones son: $(0,0)$; $(2p,2p)$; $\big(p(p+1), p+1\big)$; $\big(p(1-p), p-1\big)$; y por la simetría añadimos $\big(p+1, p(p+1)\big)$; $\big(p-1, p(1-p)\big)$.

## OME 31. Problema 5. Solución

Sea $\alpha$ la raíz común de ambas ecuaciones. Entonces

$$\alpha^3 + m\alpha = n$$

y sustituyendo en la segunda ecuación se obtiene, tras hacer operaciones:

$$6m\alpha^4 + 8m^2\alpha^2 + 2m^3 = 0.$$

Si suponemos $m \neq 0$, entonces simplificando la relación anterior queda:

$$3\alpha^4 + 4m\alpha^2 + m^2 = 0.$$

Resolviendo respecto de $m$ obtenemos

$$m = \begin{cases} -\alpha^2 & \text{(i)} \\ -3\alpha^2 & \text{(ii)} \end{cases}$$

Analicemos cada caso.
(i) Si $m = -\alpha^2$, sustituyendo en la primera ecuación y despejando $n$ queda

$$n = \alpha^3 - \alpha^3 = 0$$

en contra de lo supuesto. Por tanto (i) queda descartado.

(ii) Si $m = -3\alpha^2$, sustituyendo en la primera ecuación y despejando $n$ resulta $n = \alpha^3 - 3\alpha^3 = -2\alpha^3$ y la primera ecuación queda

$$x^3 - 3\alpha^2 x + 2\alpha^3 = (x-\alpha)\left(x^2 + \alpha x - 2\alpha^2\right) = (x-\alpha)^2(x+2\alpha)$$

que, efectivamente, tiene la raíz $\alpha$ doble.
De $n = -2\alpha^3$ obtenemos $\alpha = \sqrt[3]{-\frac{n}{2}}$ .
Entonces la segunda ecuación es de la forma

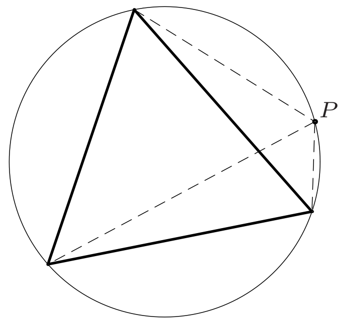
$$-2\alpha^3\left(x^3 + 9\alpha x^2 + 15\alpha^2 x - 25\alpha^3\right) = 0,$$

y, dividiendo por $(x-\alpha)$, resulta $-2\alpha^3(x-\alpha)(x+5\alpha)^2 = 0$, cuyas raíces son $\alpha$ y $-5\alpha$ siendo doble la última.

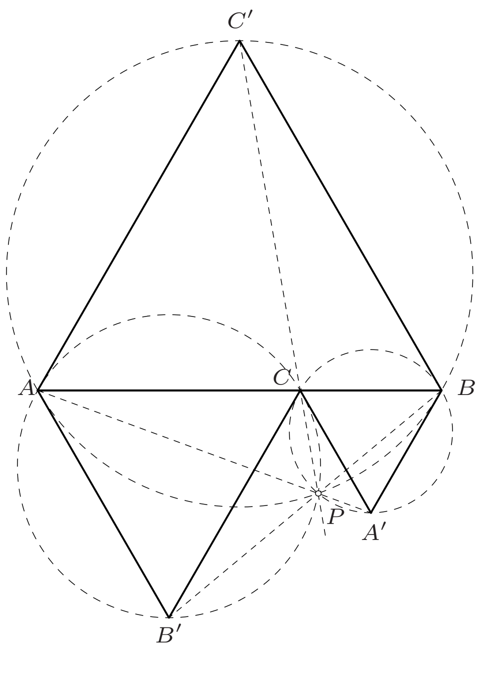
*Observación.* Si $m = 0$ las dos ecuaciones son iguales y sus tres raíces son las mismas pero la primera no tiene dos raíces iguales por lo que en el enunciado debería haberse añadido $m \neq 0$.

## OME 31. Problema 6. Solución

Para resolver este problema utilizaremos muchas veces la propiedad siguiente: si desde un punto $P$ de la circunferencia circunscrita a un triángulo equilátero trazamos segmentos que lo unan a los tres vértices, dichos segmentos forman ángulos de $60°$, $60°$ y $120°$; y este último corresponde al ángulo formado por los segmentos que une $P$ con los vértices más próximos. Y recíprocamente, si dos de los ángulos que forman los segmentos que unen un punto $P$ con los vértices de un triángulo equilátero son de $60°$ y $60°$, entonces dicho punto $P$ pertenece a la circunferencia circunscrita al triángulo.

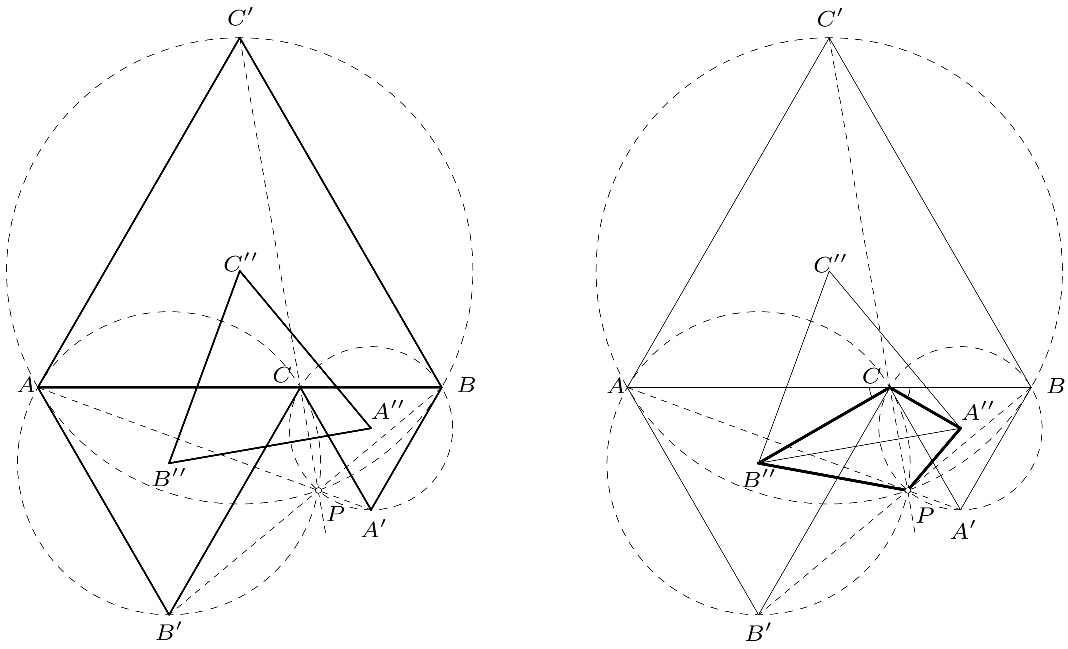



a) Tracemos las circunferencias circunscritas a los triángulos $ACB'$ y $CBA'$, y sea $P$ el punto de intersección distinto del $C$. Desde $P$ se ven $AC$ y $CB$ bajo ángulo de $60°$, luego se ve $AB$ bajo ángulo de $120°$, y por lo tanto la circunferencia circunscrita a $ABC'$ también pasa por $P$. Además, desde $P$ vemos $CB$ bajo ángulo de $60°$ y $CB'$ bajo ángulo de $120°$, y esto implica que $B'$, $P$ y $B$ están alineados. Un razonamiento análogo demuestra que $A'$, $P$ y $A$ están alineados. En cuanto a la alineación de $P$, $C$, $C'$, basta observar que tanto $C'B$ como $CB$ se ven desde $P$ bajo ángulo de $60°$.




b) Si observamos que el ángulo $\widehat{APB}$ es de $120°$ deducimos que el lugar geométrico de $P$ es el arco de circunferencia circunscrita a $ABC'$ que está por debajo del segmento $AB$.

c) Para demostrar esta parte utilizaremos que la cuerda común a dos circunferencias secantes es perpendicular a la línea de los centros. El segmento $A''B''$ es perpendicular a $CP$, el $C''B''$ es perpendicular a $AP$ y el $C''A''$ es perpendicular a $BP$. Como que $CP$ y $AP$ forman un ángulo de $60°$, también forman ese ángulo las $A''B''$ y $B''C''$. Repitiendo el razonamiento, vemos que los tres ángulos de $A''B''C''$ son de $60°$, y el triángulo es equilátero.




d) El cuadrilátero $A''PB''C$ marcado en la figura tiene las dos diagonales que son la cuerda común de dos circunferencias y la línea de los centros. Por lo tanto es simétrico respecto de esta última y $\widehat{A''CB''} = \widehat{A''PB''}$. Pero $\widehat{A''CB''} = 180° - 30° - 30° = 120°$ (los ángulos señalados son de $30°$), de forma que $\widehat{A''PB''} = 120°$ y esto nos dice que desde $P$ se ve el lado $A''B''$ del triángulo equilátero $A''B''C''$ bajo ángulo de $120°$, es decir que $P$ está en la circunferencia circunscrita a este triángulo.

**OME 32. Problema 1. Solución**

Se tiene

$$\frac{a+1}{b}+\frac{b+1}{a}=\frac{a^2+b^2+a+b}{ab}\in\mathbb{Z}.$$

Sea $d=\operatorname{mcd}(a,b)$. Como $a\,b$ es divisible por $d^2$, entonces $a^2+b^2+a+b$ es divisible por $d^2$ y como también lo es $a^2+b^2$, debe serlo $a+b$. Al ser $a$ y $b$ naturales, se tiene

$$a+b\geq d^2$$

de donde

$$\sqrt{a+b}\geq d.$$

## OME 32. Problema 2. Solución

*Primera solución*

Teniendo en cuenta el teorema de la mediana, la relación del enunciado se escribe

$$c-b=\frac{2}{3}\left(\sqrt{\frac{a^2+c^2}{2}-\frac{b^2}{4}}-\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}-\frac{c^2}{4}}\right),$$

y multiplicando y dividiendo por la expresión conjugada queda:

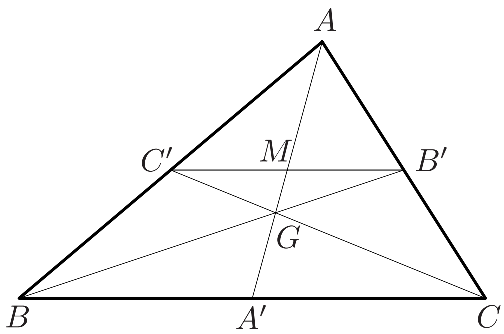
$$c-b=\frac{2}{3}\frac{\frac{3}{4}\left(c^2-b^2\right)}{m_c+m_b} \quad \text{que es equivalente a} \quad (c-b)\left(m_c+m_b-\frac{c+b}{2}\right)=0.$$

Probaremos que el segundo factor es positivo, de donde se deducirá la conclusión.
Llamando $B'$ y $C'$ a los puntos medios de $AC$ y $AB$ respectivamente, en los triángulos $CC'A$ y $BB'A$ tenemos por la desigualdad triangular

$$m_b+\frac{b}{2}>c; \quad m_c+\frac{c}{2}>b.$$

Sumando ambas desigualdades se obtiene el resultado.

*Segunda solución*




Llamando $A'$, $B'$, $C'$ a los puntos medios de los lados $BC$, $AC$ y $AB$, respectivamente, y dividiendo por dos la condición del enunciado, ésta podemos escribirla como

$$C'A+C'G=B'A+B'G,$$

es decir, los puntos $C'$ y $B'$ están en una elipse de focos $A$ y $G$.
Llamando $M$ al punto medio de $C'B'$, $M$ está en la mediana $AA'$ y no es el centro de la elipse (punto medio del segmento $AG$), y por tanto $C'B'$ ha de ser perpendicular a $AA'$, y entonces $AA'$ además de mediana es altura y el triángulo es isósceles.

## OME 32. Problema 3. Solución

Podemos conseguir coeficientes $A$, $B$, $C$, tales que se tenga idénticamente

$$f(x) = Ax(x+1) + Bx(x-1) + C(x^2-1).$$

Particularizando para $x = 1$, -1 ,0 y resolviendo el sistema queda

$$f(x) = \frac{f(1)}{2}x(x+1) + \frac{f(-1)}{2}x(x-1) + f(0)(1-x^2).$$

De aquí se deduce

$$|f(x)| \leq \frac{1}{2}|x(x+1)| + \frac{1}{2}|x(x-1)| + \left|1-x^2\right|;$$

como $-1 \leq x \leq 1$, $1+x \geq 0$, $1-x \geq 0$ y $1-x^2 \geq 0$, resulta

$$|f(x)| \leq \frac{|x|}{2}(1+x) + \frac{|x|}{2}(1-x) + 1 - x^2 = -x^2 + |x| + 1 = \frac{5}{4} - \left(|x| - \frac{1}{2}\right)^2 \leq \frac{5}{4}.$$

Por otra parte, para $x \neq 0$, es $g(x) = x^2 f\left(\frac{1}{x}\right)$. Entonces

$$g(x) = \frac{f(1)}{2}(1+x) + \frac{f(-1)}{2}(1-x) + f(0)\left(x^2-1\right)$$

válido para $-1 \leq x \leq 1$. Así pues

$$|g(x)| \leq \frac{1+x}{2} + \frac{1-x}{2} + 1 - x^2 = 2 - x^2 \leq 2.$$

# OME 32. Problema 4. Solución

Si $p < 0$, entonces $\sqrt{x^2 - p} > x$; como $2\sqrt{x^2 - 1} \geq 0$, no existe solución. Por tanto $p \geq 0$. Aislando un radical y elevando al cuadrado dos veces se llega a la ecuación:

$$8\,(2-p)\,x^2 = (4-p)^2\,, \quad \text{de donde} \quad x = \frac{|4-p|}{\sqrt{8\,(2-p)}}.$$

Como $x \in R$, debe ser $p < 2$, así que

$$x = \frac{4-p}{\sqrt{8\,(2-p)}}.$$

Sustituyendo en la ecuación dada se obtiene

$$\sqrt{\frac{(4-3p)^2}{8\,(2-p)}} + 2\sqrt{\frac{p^2}{8\,(2-p)}} = \frac{4-p}{\sqrt{8\,(2-p)}}$$

y como $p > 0$, es $|p| = p$; y finalmente

$$|4-3p| + 2p = 4 - p \implies |4-3p| = 4-3p \implies 4-3p \geq 0 \iff 0 \leq p \leq \frac{4}{3}.$$

E

**OME 32. Problema 5. Solución**

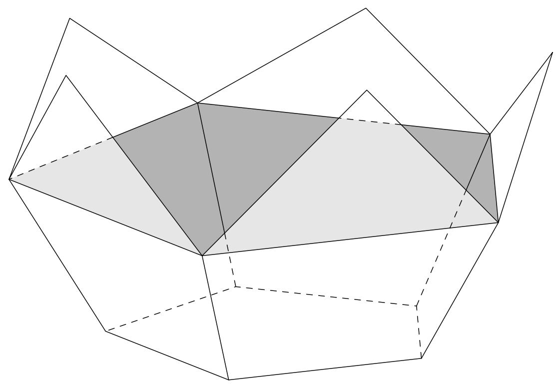
Diremos que los agentes $A$ y $B$ son neutrales si $A$ no vigila a $B$ ni $B$ vigila a $A$.
Sean $A_1,\ A_2,\ \ldots,\ A_n$ los agentes. Sea $a_i$ el número de agentes que vigilan a $A_i$, $b_i$ el número de agentes que son vigilados por $A_i$, y $c_i$ el número de agentes que son neutrales con $A_i$.
Es claro que

$$a_i + b_i + c_i = 15, \quad a_i + c_i \leq 8, \quad b_i + c_i \leq 8 \ \text{ para } \ i = 1, 2, \ldots .16.$$

Notemos que si una cualquiera de las dos últimas desigualdades no se cumpliese, entonces no se podrían numerar 10 espías en la forma indicada.
Combinando las relaciones anteriores obtenemos $c_i \leq 1$. Por tanto para cualquier espía el número de sus colegas neutrales es 0 ó 1.
Razonemos por reducción al absurdo.
Supongamos que hubiera un grupo de 11 espías que NO se pudiera numerar en la forma descrita. Sea $B$ uno cualquiera de los espías de este grupo.
Numeramos los otros 10 espías como $C_1,\ C_2,\ \ldots,\ C_{10}$ de modo que $C_1$ vigila C$_2$, ..., $C_{10}$ vigila a $C_1$. Supongamos que ninguno de los $C_i$ sea neutral respecto de $B$. Entonces si $C_1$ vigila a $B$, $B$ no puede vigilar a $C_2$, pues en tal caso $C_1$, $B$, $C_2$, ..., $C_{10}$ formaría un grupo en las condiciones del problema; luego $C_2$ vigila $B$ , etc. De este modo llegamos a la contradicción de que todos los espías del grupo vigilan a $B$. Por tanto cada uno de los 11 espías debe tener uno y sólo uno del grupo neutral con él, lo cual es imposible.

# OME 32. Problema 6. Solución

La figura formada por el agua es un tronco de pirámide pentagonal cuya base menor es el pentágono dado y cuya base mayor es otro pentágono regular que tiene por lado la diagonal del anterior paralela a la arista de la base como se muestra en la siguiente figura.



Este pirámide aparece en la figura en forma invertida para una mejor comprensión del dibujo.

Si llamamos $d$ a la diagonal del pentágono regular de lado uno , sabemos que

$$\frac{1}{d-1} = \frac{d}{1} \iff d^2 - d - 1 = 0 \implies d = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \varphi \tag{1}$$

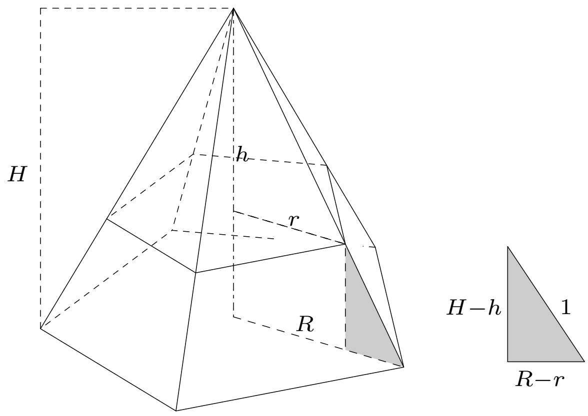
$\varphi$ es el llamado *número áureo* y representa la relación entre la diagonal y el lado de un pentágono regular. En nuestro caso es la relación de semejanza entre las bases del tronco de pirámide. Además, $\cos 36° = \frac{d}{2} = \frac{\varphi}{2} = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$, y para el radio $r$ sale $\operatorname{sen} 36° = \frac{1}{2r}$, de donde

$$r = \frac{1}{2 \operatorname{sen} 36°} = \frac{1}{\sqrt{4-\varphi^2}}. \tag{2}$$

Llamando $V$ al volumen de la pirámide grande, $v$ al de la pequeña, sabemos que $V = \varphi^3 v$; y para el volumen del tronco de cono $V_t$ queda

$$V_t = V - v = \varphi^3 v - v = v(\varphi^3 - 1) = \frac{1}{3} ah(\varphi^3 - 1);$$

siendo $a$ el área del pentágono de lado 1. Sólo nos queda calcular $a, h$, sustituir y operar:




El área $a$ la calculamos sumado 5 triángulos isósceles de lados iguales $r$, con ángulo desigual de 72°.

$$a = \frac{5}{2}r^2 \operatorname{sen} 72^\circ = \frac{5}{2}\,r^2\, 2 \operatorname{sen} 36^\circ \ \cos 36^o = \frac{5}{2}\,r\ \cos 36^\circ = \frac{5}{4}\,r\,\varphi.$$

(Hemos usado $2r \operatorname{sen} 36^\circ = 1$).
Para calcular $h$, por la semejanza de los triángulos de la figura central, tenemos:

$$\frac{H}{R} = \frac{h}{r} = \frac{H-h}{R-r}$$

implica que

$$h = \frac{r\,(H-h)}{R-r} = \frac{r\sqrt{1-(R-r)^2}}{r(\varphi-1)} = \frac{\sqrt{1-r^2(\varphi-1)^2}}{\varphi-1} = \frac{\sqrt{1-\frac{(\varphi-1)^2}{4-\varphi^2}}}{\varphi-1}.$$

Como $\varphi$ cumple la ecuación (1), es $\varphi^2 = \varphi + 1$; tenemos para la expresión de $h$

$$h = \frac{\sqrt{1-\frac{(\varphi-1)^2}{4-\varphi^2}}}{\varphi-1} = \frac{\sqrt{4-\varphi^2-\varphi^2+2\varphi-1}}{(\varphi-1)\sqrt{4-\varphi^2}} = \frac{\sqrt{3-2\varphi-2+2\varphi}}{(\varphi-1)\sqrt{4-\varphi^2}} = \frac{1}{(\varphi-1)\sqrt{4-\varphi^2}}.$$

Sustituyendo las expresiones de $a$ y $h$ y poniendo $\varphi^3$-1= ($\varphi$-1)($\varphi^2 + \varphi + 1$) queda

$$V_t = \frac{1}{3}\,\frac{5}{4}\,\frac{\varphi}{\sqrt{4-\varphi^2}}\frac{(\varphi^3-1)}{(\varphi-1)\sqrt{4-\varphi^2}} = \frac{5}{12}\,\frac{\varphi(\varphi^2+\varphi+1)}{4-\varphi^2} = \frac{5}{6}\,\frac{\varphi(\varphi+1)}{3-\varphi} = \frac{5}{6}\,\frac{2\varphi+1}{3-\varphi}$$

y sustituyendo el valor de $\varphi$ de (1), queda finalmente:

$$V_t = \frac{5}{3}\,\frac{2+\sqrt{5}}{5-\sqrt{5}} = \frac{15+7\sqrt{5}}{12} \cong 2{,}554\text{m}^3.$$

**OME 33. Problema 1. Solución**

Sea la progresión, $a, a+d, a+2d, \ldots, a+99d$; tenemos que hallar

$$S = a^2 + (a+d)^2 + \ldots + (a+99d)^2 =$$
$$= 100a^2 + 2ad\,(1+2+\ldots+99) + d^2\left(1^2+2^2+\ldots+99^2\right).$$

Para calcular $a$ y $d$ resolvemos el sistema

$$\begin{cases} (a+a+99d)\,50 = -1 \\ (a+d+a+99d)\,25 = 1 \end{cases}$$

que, después de hacer operaciones, da $a = -2,98$; $d = 0,06$.
El resto es fácil de calcular. Los paréntesis son progresiones de primer y segundo orden.

$$1+2+\ldots+99 = 4950; \quad 1^2+2^2+\ldots.+99^2 = 328350.$$

El resultado final es $S = 299{,}98$

## OME 33. Problema 2. Solución

Numeremos los 16 puntos como indica la tabla siguiente.

| | | | |
|---|---|---|---|
| 13 | 14 | 15 | 16 |
| 9 | 10 | 11 | 12 |
| 5 | 6 | 7 | 8 |
| 1 | 2 | 3 | 4 |

Por simple tanteo se obtiene un conjunto de seis puntos que cumple la condición del enunciado, por ejemplo $\{1, 2, 3, 8, 12, 16\}$.
Supongamos que hubiera un conjunto $M$ de 7 puntos que también la cumpliese. Notemos que si cuatro puntos forman un cuadrado, a lo sumo figurarán dos de ellos en $M$. Los puntos de los conjuntos

$$\{1, 4, 16, 13\}, \{2, 8, 15, 9\}, \{3, 12, 14, 5\}$$

forman cuadrados y su unión forma el "contorno exterior" de $A$, luego a los sumo 6 de los puntos elegidos deben estar en $M$ y por tanto al menos un punto de $M$ debe ser del conjunto "interior" de $A$ $\{6, 7, 10, 11\}$. Por la simetría de la figura supongamos que es el 7. Como $\{7, 16, 9\}$ y $\{1, 7, 14\}$ forman triángulos rectángulos isósceles, a lo sumo 2 de los puntos del conjunto $\{1, 9, 14, 16\}$ deberán figurar en $M$. Además, $\{5, 7, 13, 15\}$ forman un cuadrado; por tanto, a lo sumo podremos elegir dos números entre $\{5, 13, 15\}$ , de ello se deduce en $M$ deben figurar al menos tres puntos de $\{2, 3, 4, 6, 8, 10, 11, 12\}$. Si descomponemos este conjunto en dos subconjuntos "cuadrados" y disjuntos

$$\{3, 6, 11, 8\} \text{ y } \{2, 4, 10, 12\}$$

forzosamente de uno de ellos habremos de tomar dos puntos y uno de otro.
Si tomamos dos puntos del primero, las únicas posibilidades son $\{3, 11\}$ y $\{6, 8\}$, ambas incompatibles con cualquier elección del punto restante en el segundo conjunto.
Si los dos puntos se eligen del segundo, las únicas maneras son $\{2, 12\}$ y $\{4, 10\}$, de nuevo incompatibles con cualquier elección del punto que falta en el primer conjunto.
En resumen el número máximo de elementos es 6.

## OME 33. Problema 3. Solución

*Primera solución*

Sean $\alpha$ y $\beta$ las raíces. Los tres puntos que definen la circunferencia son $A(\alpha, 0)$, $B(\beta, 0)$ y $C(0, q)$, cumpliéndose $\alpha + \beta - p = 0$ y $\alpha\beta = q$ (*).
La mediatriz de $AB$ es la recta paralela al eje $OY$ de ecuación $x = -\frac{p}{2}$.
Hallando la mediatriz de $AC$, cortando con la anterior y teniendo en cuenta las relaciones (*), se obtiene para el centro de la circunferencia las coordenadas $(-\frac{p}{2}, \frac{q+1}{2})$ y para el radio $r = \sqrt{\frac{p^2+(1-q)^2}{4}}$. La ecuación de la circunferencia es $(x + \frac{p}{2})^2 + (y - \frac{q+1}{2})^2 = \frac{p^2+(1-q)^2}{4}$, que una vez operada queda:

$$x^2 + y^2 + px - (1 + q)y + q = 0,$$

que se cumple para el punto $(0, 1)$, con independencia de $p$ y $q$, como se comprueba por simple sustitución.
Claramente el punto fijo se puede obtener a partir de tres circunferencias concretas.

*Segunda solución*

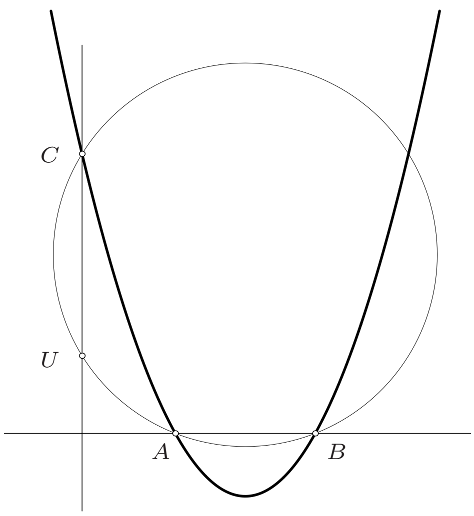
Puesto que la parábola corta al eje de abscisas en dos puntos, se podrá escribir en la forma:

$$y = (x - a)\,(x - b)$$

y los puntos de intersección son

$$A(a, 0),\ \ B(b, 0),\ \ C(0, a\,b).$$

La inversión de polo el origen que transforma $A$ en $B$, transforma $C$ en $U(0, 1)$ , así que los cuatro puntos $A, B, C, U$ son concíclicos y todas las circunferencias pasan por el punto fijo $U$.



# OME 33. Problema 4. Solución

Si ponemos $\sqrt{k^2 - kp} = n$ nos queda $k^2 - pk - n^2 = 0$, de donde se deduce

$$k = \frac{p \pm \sqrt{p^2 + 4n^2}}{2}. \qquad (*)$$

El radicando ha de ser cuadrado perfecto; llamémosle $a$. Se tiene

$$p^2 + 4n^2 = a^2 \quad \text{o bien} \quad p^2 = (a + 2n)(a - 2n).$$

Como $p$ es primo y $a+2n \geq a-2n$, sólo hay dos posibilidades. Una de ellas es $a+2n = p^2$ y $a - 2n = 1$, y la otra $a + 2n = p$ y $a - 2n = p$.

En el primer caso es $a = \frac{p^2+1}{2}$ y $n = \frac{p^2-1}{4}$, lo que exige $p \neq 2$, ($n$ natural).

En el segundo caso resulta $a = p$ y $n = 0$.

Sustituyendo los valores de $a$ en (*) y operando queda:

Si $p = 2$ , entonces $k = 2$ o $k = 0$.

Si $p \neq 2$, entonces quedan los cuatro valores:

$$k_1 = \left(\frac{p+1}{2}\right)^2, \quad k_2 = -\left(\frac{p-1}{2}\right)^2, \quad k_3 = p, \quad k_4 = 0.$$

## OME 33. Problema 5. Solución

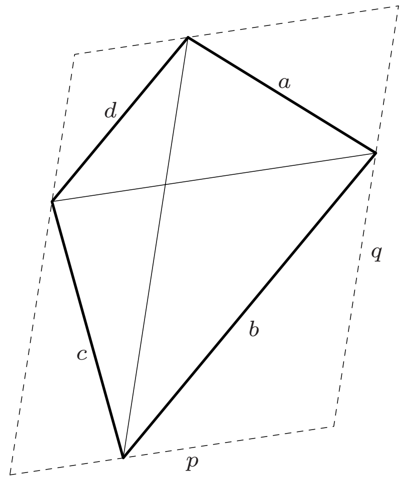
*Primera solución*

Sea el cuadrilátero de lados $a$, $b$, $c$, $d$ y diagonales $p$ y $q$. Trazando la paralelas por cada vértice a la diagonal que no pasa por él se forma un paralelogramo de área 2 y lados $p$ y $q$.
Por el teorema isoperimétrico, de todos los paralelogramos de área 2, el cuadrado tiene perímetro mínimo que vale $4\sqrt{2}$, luego

$$2\,(p+q) \geq 4\sqrt{2} \Leftrightarrow p+q \geq 2\sqrt{2}. \tag{1}$$

En cuanto al los lados, por el mismo teorema para una cuadrado de área 1 el perímetro es 4 luego

$$a+b+c+d \geq 4. \tag{2}$$




Sumando(1) y (2) se obtiene el resultado.

*Segunda solución*

Esta solución no usa la propiedad isoperimétrica sino que establece directamente las desigualdades (1) y (2).
Si $\alpha$ es el ángulo que forman las diagonales, tenemos:

$$1 = \frac{p\,q}{2}\,\mathrm{sen}\,\alpha \leq \frac{p\,q}{2} \quad \text{de donde} \quad p\,q \geq 2$$

pero $(p+q)^2 = (p-q)^2 + 4p\,q \geq 4p\,q \geq 8$, de donde

$$p+q \geq \sqrt{8} = 2\sqrt{2}. \tag{1}$$

Para los lados, si descomponemos el cuadrilátero en dos triángulos mediante la diagonal $q$, tenemos:

$$1 \leq \frac{a\,b}{2} + \frac{c\,d}{2}.$$

Descomponiendo ahora en dos triángulos mediante la diagonal $p$ resulta

$$1 \leq \frac{bc}{2} + \frac{da}{2}$$

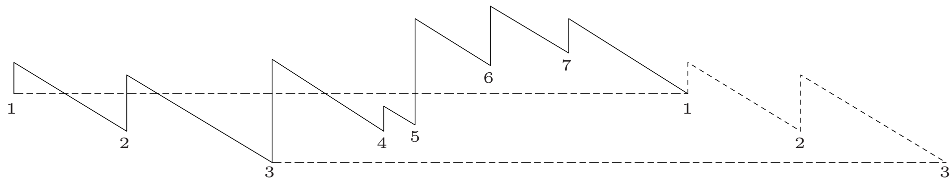
y de ambas desigualdades se obtiene $a\,b + b\,c + c\,d + d\,a \geq 4$.
Pero $(a+b+c+d)^2 = \big((a+c)-(b+d)\big)^2 + 4(a+c)(b+d) \geq 4(a+c)(b+d) \geq 16$, de donde

$$a+b+c+d \geq 4. \tag{2}$$

Basta sumar (1) y (2) para obtener lo pedido.

**OME 33. Problema 6. Solución**

*Primera solución*



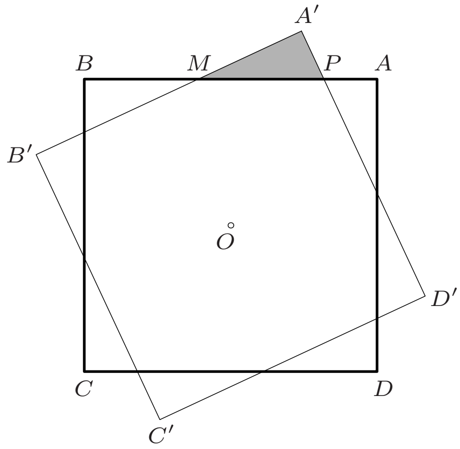

Sean $c_1$, $c_2$, ... , $c_n$ las cantidades de combustible en cada uno de los $n$ depósitos y sean $d_1$, $d_2$, ... , $d_n$ las distancias a recorrer desde cada depósito hasta el siguiente.
Hagamos el gráfico del consumo comenzando en un punto de aprovisionamiento cualquiera.
Notemos que los tramos inclinados tienen todos la misma pendiente. Los tramos bajo el eje representan las situaciones imposibles. La pendiente de los tramos inclinados vale $-\dfrac{\sum c_i}{\sum d_i}$.
La hipótesis de que el total de combustible es la cantidad exacta para dar la vuelta se traduce en que la gráfica comienza y termina en el eje $OX$.
La función resultante (trazo continuo) tiene un mínimo, en la figura en el punto 3. Basta comenzar en ese punto para asegurar que el recorrido es posible.
En efecto, gráficamente equivale a trasladar el eje $OX$ en sentido vertical hasta el punto más bajo con lo que aseguramos que ninguna zona queda bajo el eje. La nueva gráfica puede trazarse a partir del punto 3 siguiendo el mismo trazado hacia la derecha y trasladando la parte anterior (tramos 1-2 y 2-3) al punto final de la gráfica anterior (de puntos en la figura).

*Segunda solución*

Se numeran los depósitos de 1 a $n$ comenzando por uno cualquiera en sentido antihorario.
Llamamos $a_1$, a$_2$, ... , $a_n$ a la cantidad de gasolina de cada depósito; y $b_1$, $b_2$, ... , $b_n$ a la cantidad de gasolina necesaria para ir del depósito $a_i$ al siguiente. Finalmente, ponemos $d_1 = a_1 - b_1$, $d_2 = a_2 - b_2$, ... , $d_n = a_n - b_n$. Diremos que un depósito es positivo o negativo según lo sea $d_i$.
Si $d_i = 0$, la ubicación del depósito $i$ no influye en la ordenación del recorrido. Por ello podemos suponer sin pérdida de generalidad que $d_i \neq 0$ para todo $i$.
Por otra parte, si hay varios depósitos consecutivos positivos o negativos, el tramo limitado por ellos se puede considerar como un único tramo positivo o negativo. Así, el problema se reduce a tener un número par de depósitos alternativamente positivos o negativos. Agrupando los tramos por parejas, éstas resultarán positivas o negativas y volvemos a repetir el proceso.
Así reducimos el caso a un número de depósitos $n_1 \leq \frac{n}{2}$.
Como $n < 2^k$, a lo sumo en $k-1$ etapas llegaremos a tener 2 depósitos, uno con más gasolina que otro, en cuyo caso empezando por el que tenga más combustible se puede completar el circuito.
El caso de un sólo depósito es trivial: se empieza y termina en ese único depósito.

## OME 34. Problema 1. Solución

*Primera solución*




Por la simetría bastará considerar $0 < \alpha < 90°$, ya que la función es periódica con periodo de un cuarto de vuelta. El área pedida $S(\alpha)$ sale restando del área del cuadrado cuatro triángulos como el $PA'M$.

Llamando $x$ al cateto $PA'$ e $y$ al cateto $A'M$, el área de cuatro triángulos vale $2xy$. Como el lado $B'A'$ vale 1, tenemos:

$$x + y = 1 - \sqrt{x^2 + y^2}, \tag{1}$$

relación que elevada al cuadrado y simplificada queda

$$2xy = 1 - 2\sqrt{x^2 + y^2}, \tag{2}$$

pero

$$x = \sqrt{x^2 + y^2} \cos\alpha, \quad y = \sqrt{x^2 + y^2} \operatorname{sen}\alpha,$$

y sustituyendo en (1) resulta

$$\sqrt{x^2 + y^2}(1 + \cos\alpha + \operatorname{sen}\alpha) = 1 \text{ de donde } \sqrt{x^2 + y^2} = \frac{1}{1 + \operatorname{sen}\alpha + \cos\alpha}.$$

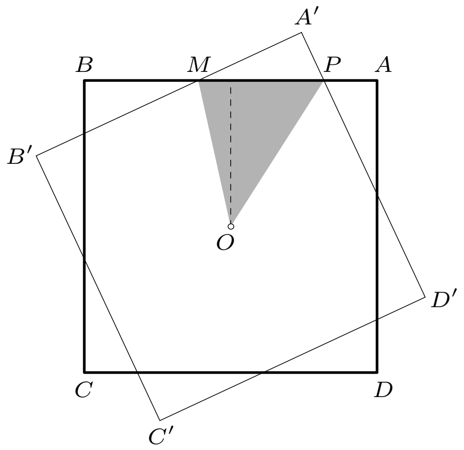
Sustituyendo en (2) y operando obtenemos

$$2xy = 1 - \frac{2}{1 + \operatorname{sen}\alpha + \cos\alpha} = \frac{\operatorname{sen}\alpha + \cos\alpha - 1}{\operatorname{sen}\alpha + \cos\alpha + 1}.$$

Finalmente, para el área pedida obtenemos

$$S(\alpha) = 1 - \frac{\operatorname{sen}\alpha + \cos\alpha - 1}{\operatorname{sen}\alpha + \cos\alpha + 1} = \frac{2}{\operatorname{sen}\alpha + \cos\alpha + 1} \quad \text{con} \quad 0 \leq \alpha \leq 90°.$$

*Segunda solución*




El área pedida consta de 8 triángulos como el sombreado en la figura $OPM$. Tomando como base $b = MP$, la altura es constante (de trazos en la figura) y vale $1/2$. En el triángulo $PA'M$ se tiene $MA' = b\cos\alpha$, $PA' = b \operatorname{sen}\alpha$; pero $BM = MA'$ y $PA = PA'$, y además

$$BM + MP + PA = 1 \quad \text{o bien} \quad b\cos\alpha + b + b\operatorname{sen}\alpha = 1,$$

de donde

$$b = \frac{1}{\operatorname{sen}\alpha + \cos\alpha + 1}$$

y el área pedida es:

$$S(\alpha) = 8\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{\operatorname{sen}\alpha + \cos\alpha + 1} = \frac{2}{\operatorname{sen}\alpha + \cos\alpha + 1} \quad \text{con} \quad 0 \le \alpha \le 90°.$$

**OME 34. Problema 2. Solución**

Sea $n$ un número que cumpla las condiciones del enunciado, y $s$ la suma de sus cifras. Como $1000 \leq n \leq 9999$ y $n = s^3$, resulta

$$11 \leq s \leq 21. \tag{1}$$

Si $n = xyzt$, tenemos

$$\left.\begin{aligned} 1000x + 100y + 10z + t = s^3 \\ x + y + z + t = s \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

y restando queda

$$999x + 99y + 9z = s^3 - s \tag{3}$$

cuyo segundo miembro ha de ser múltiplo de 9 (por serlo el primero) y, habida cuenta de que

$$s^3 - s = (s-1)s(s+1)$$

y por (1), sólo hay tres valores de $s^3 - s$ que son múltiplos de 9

$$16 \cdot 17 \cdot 18; \; 17 \cdot 18 \cdot 19 \; \text{ y } \; 18 \cdot 19 \cdot 20.$$

Sustituimos en (3) y analizamos cada caso.

Primer caso.

$$999x + 99y + 9z = 16 \cdot 17 \cdot 18 \text{ implica que } \; 111x + 11y + z = 544$$

y resulta inmediatamente $x = 4$, $y = 9$, $z = 1$, valores que llevados a (2) con $s = 17$, dan $t = 3$ y finalmente $n = 4913$.

Segundo caso.

$$999x + 99y + 9z = 17 \cdot 18 \cdot 19 \text{ implica que } \; 111x + 11y + z = 646,$$

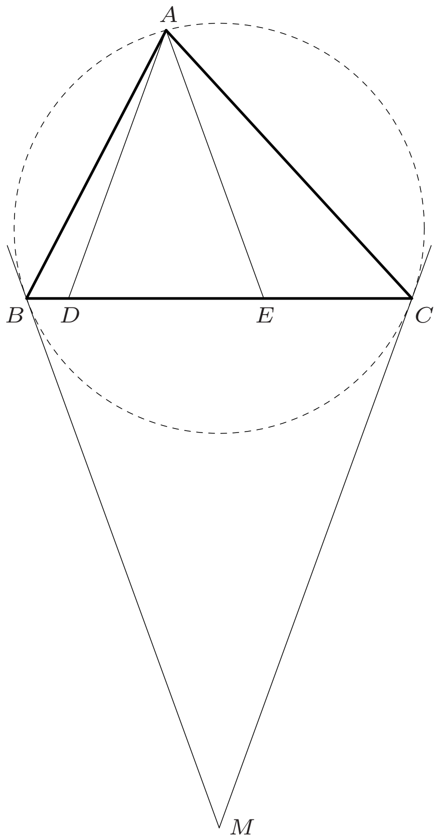
de donde $x = 5$, $y = 8$, $z = 3$, valores que llevados a (2) con $s = 18$ dan $t = 2$ y finalmente $n = 5832$.

Tercer caso.

$$999x + 99y + 9z = 18 \cdot 19 \cdot 20 \text{ implica que } \; 111x + 11y + z = 760,$$

y resulta $x = 6$; $y = 8$; $z = 6$, valores que llevados a (2) con $s = 19$ dan una contradicción. Resumiendo, las únicas soluciones son $n = 4913$ y $n = 5832$.

**OME 34. Problema 3. Solución**




Los triángulos $ABC$ y $ADC$ son semejantes pues tienen los tres ángulos iguales ya que $\widehat{ADC} = \widehat{BCM} = \widehat{BAC}$. La primera igualdad sale por ser $AD$ y $CM$ paralelas y la segunda por ser $\widehat{BCM}$ un ángulo semiinscrito. El ángulo $\widehat{ACD}$ es común.
Estableciendo la proporcionalidad entre sus lados, resulta:

$$\frac{CD}{AC} = \frac{AC}{BC} \quad \text{o bien} \quad CD \cdot BC = AC^2. \tag{1}$$

De modo análogo, los triángulos $ABC$ y $ABE$ son semejantes pues $\widehat{AEB} = \widehat{EBM} = \widehat{BAC}$ y el ángulo $\widehat{ABE}$ es común.
Estableciendo la proporcionalidad entre sus lados, resulta:

$$\frac{BE}{AB} = \frac{AB}{BC} \quad \text{o bien} \quad BE \cdot BC = AB^2. \tag{2}$$

Dividiendo las igualdades (1) y (2) se obtiene el resultado.

**OME 34. Problema 4. Solución**

Sean $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ los tres ángulos y supongamos $\alpha \leq \beta \leq \gamma$.
Si fuera $\gamma \geq \frac{\pi}{2}$, tendría que ser $\alpha < \frac{\pi}{4}$ y entonces $\tan \alpha$ no sería entero.
Si $\tan \alpha > 1$, entonces $\alpha \geq \arctan 2 > \arctan \sqrt{3} = \frac{\pi}{3}$, imposible ya que $\alpha + \beta + \gamma = \pi$.
Por tanto $\arctan \alpha = 1$ y $\beta + \gamma = \frac{3\pi}{4}$, con lo que

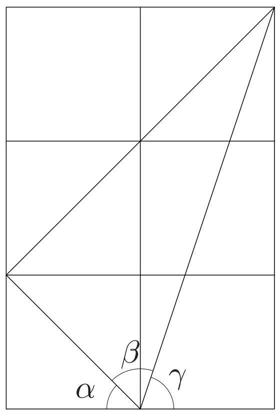
$$\tan(\beta + \gamma) = -1 = \frac{\tan \beta + \tan \gamma}{1 - \tan \beta \, \tan \gamma},$$

relación que operada se convierte en

$$(\tan \beta - 1)(\tan \gamma - 1) = 2$$

de donde, por ser enteros positivos, se sigue $\tan \beta = 2$ y $\tan \gamma = 3$.

Existe una visualización “sin palabras” de la solución: $\arctan 1 + \arctan 2 + \arctan 3 = \pi$:



## OME 34. Problema 5. Solución

Supongamos $f(1) = b$. Entonces, $f(1 + b) = 2b$, y como $f$ es estrictamente creciente, se tiene:

$$b = f(1) < f(1 + 1) < \cdots < f(1 + b) = 2b = b + b$$

y resulta que $f(1), f(2), \ldots, f(1+b)$ son $b+1$ números naturales distintos, el primero vale $b$ y el último $2b$, y por tanto han de ser consecutivos.
Resulta entonces

$$f(1) = b,\ \ f(2) = 1 + b,\ \ f(3) = 2 + b, \ldots, f(1 + b) = b + b.$$

En general, y haciendo un razonamiento parecido para $n > 1$, si $f(n) = c$, será $f(n + c) = 2c = c + c$ y resulta que

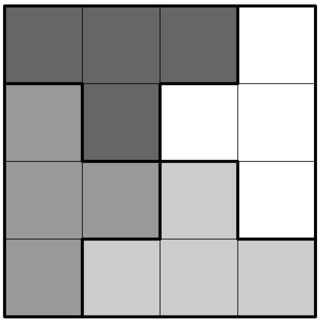
$$c = f(n) < f(n + 1) < \cdots < f(n + c) = c + c$$

y los números $f(n), f(n + 1), \ldots, f(n + c)$ son consecutivos.
Así pues,

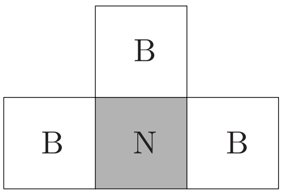
$$f(n) = n - 1 + f(1).$$

**OME 34. Problema 6. Solución**

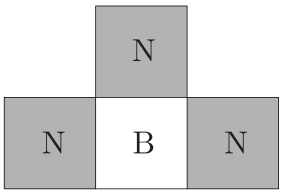
Si $n$ es múltiplo de 4, evidentemente existe solución, como indica la figura siguiente.



Recíprocamente, supongamos que el cuadrado $n \times n$ se puede recubrir. Como cada pieza tiene 4 cuadrados, deberá ser $n^2$ múltiplo de 4, y $n$ múltiplo de 2.
El caso $n = 4k$ ya sabemos que tiene solución. Queda sólo considerar el caso $n = 4k + 2$.
Veamos que en ese caso la repuesta es negativa.
Supongamos que fuera posible.
Si pintamos cada cuadradito del cuadrado dado alternativamente de blanco y negro como en un tablero de ajedrez, hay dos posibilidades para cada pieza.
Sea $a$ el número de piezas del tipo de las de la izquierda y $b$ el número de piezas del tipo de las de la derecha.



Tipo $a$



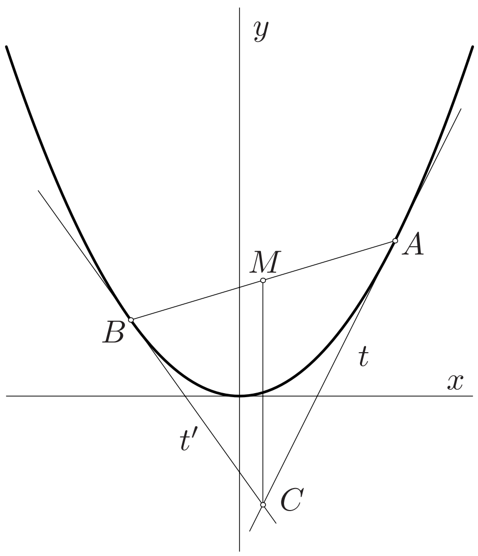
Tipo $b$

Tenemos

$$a + b = \frac{(4k+2)^2}{4} = (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1$$

luego $a + b$ ha de ser impar.
Por otra parte, como hay tantas casillas blancas como negras, se tiene: $3a + b = 3b + a$, de donde $a = b$, y $a + b = 2a$ ha de ser par en contradicción con lo anterior.

**OME 35. Problema 1. Solución**




Sean $A(a, a^2)$, $B(b, b^2)$ los dos puntos de la parábola. Las ecuaciones de $t$ y $t'$ son

$$t: \, y = 2ax - a^2; \quad t': \, y = 2bx - b^2$$

y su intersección $C$ es $C(\dfrac{a+b}{2}, a\,b)$.
La mediana $CM$ está en la recta $x = \dfrac{a+b}{2}$, paralela al eje $OY$. Las coordenadas de $M$ son $(\dfrac{a+b}{2}, \dfrac{a^2+b^2}{2})$.
Tenemos que $m = CM = \dfrac{(a-b)^2}{2}$ y si $h$ es la altura del triángulo $BMC$ resulta

$$h = \frac{|b-a|}{2} = \sqrt{\frac{m}{2}}.$$

Poniendo $[XYZ]$ para denotar el área del triángulo de vértices $X$, $Y$, $Z$, queda finalmente:

$$[ABC] = 2[BMC] = 2\,\frac{1}{2}\,m\sqrt{\frac{m}{2}} = \sqrt{\frac{m^3}{2}}.$$

## OME 35. Problema 2. Solución

Lo haremos por inducción sobre $n$. Para $n = 2$ basta tomar $a_1 = 3$, $a_2 = 4$ con $3^2+4^2 = 5^2$. Supongamos por hipótesis de inducción que

$$a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2 = k^2.$$

Veamos que podemos encontrar un entero positivo $a_{n+1}$ tal que $k^2 + a_{n+1}^2 = p^2$.
En efecto, $k^2 = p^2 - a_{n+1}^2 = (p + a_{n+1})\,(p - a_{n-1})$. Si ponemos $a = p + a_{n+1}$, $b = p - a_{n+1}$ tenemos $p = \dfrac{a+b}{2}$, $a_{n+1} = \dfrac{a-b}{2}$ y $k^2 = \dfrac{a+b}{2} \cdot \dfrac{a-b}{2}$.
La última expresión exige que $a$ y $b$ sean de la misma paridad. Distinguiremos dos casos

Primer caso. Si $a$ y $b$ son pares, entonces $k^2 = 4m$ . Tomando $a = 2m$, $b = 2$ queda

$$p = m + 1 = \frac{k^2}{4} + 1, \quad a_{n+1} = m - 1 = \frac{k^2}{4} - 1.$$

Segundo caso. Si $a$ y $b$ son impares, entonces $k^2 = 2m + 1$. Tomando $a = 2m + 1$, $b = 1$ queda

$$p = m + 1 = \frac{k^2 - 1}{2} + 1, \quad a_{n+1} = m = \frac{k^2 - 1}{2}.$$

En ambos casos hemos encontrado el entero $a_{n+1}$ que cumple las condiciones del enunciado.

# OME 35. Problema 3. Solución

En el tablero, hay casillas de tres tipos: vértice, lado, o interiores. Cada una de ellas tiene, respectivamente, dos, cuatro o seis casillas vecinas.
Si pudiéramos retirar todas las fichas del tablero, habría un momento en que quedaría sobre él una única ficha negra. Esa ficha era inicialmente blanca, luego ha tenido que cambiar de color un número impar de veces. Pero esto es imposible, porque una ficha se vuelve cada vez que se retira una ficha vecina, y ninguna ficha tiene un número impar de casillas vecinas.

**OME 35. Problema 4. Solución**

Hay 27 posibles resultados para la suma de dígitos (de 1 a 27). Las sumas 1 y 27 sólo se puede obtener de un modo (100 y 999) En el caso más desfavorable al sacar 52 (27 + 25) tarjetas todas repetirán suma dos veces y en la siguiente (extracción 53) una de ellas aparecerá por tercera vez.
Por tanto el número pedido es $27 + 25 + 1 = 53$.

## OME 35. Problema 5. Solución

*Primera solución*

i) Es sabido que uniendo $G$ con cada vértice, se forman tres triángulos: $BGC$ de base $a$ y altura $g_a$ , $AGC$ de base $b$ y altura $g_b$ y $AGB$ de base $c$ y altura $g_c$. Los tres tienen la misma área que es un tercio del área total del triángulo.
Por tanto, llamando $S$ al área de $ABC$

$$a \cdot g_a = b \cdot g_b = c \cdot g_c = \frac{2S}{3}. \tag{1}$$

Por otra parte, sabemos que $r\,(a+b+c) = 2S$ (basta unir el incentro con los tres vértices y quedan tres triángulos de bases $a$, $b$, $c$ y altura común $r$).
Sustituyendo $2S$ en (1), y despejando queda:

$$g_a = \frac{r}{3}\frac{a+b+c}{a}\ , \quad g_b = \frac{r}{3}\frac{a+b+c}{b}\ , \quad g_c = \frac{r}{3}\frac{a+b+c}{c} \tag{2}$$

y por la desigualdad triangular $b+c \geq a$, resulta $\dfrac{a+b+c}{a} = 1 + \dfrac{b+c}{a} \geq 2$, de donde $g_a \geq \dfrac{2r}{3}$ y de modo análogo para $g_b$ y $g_c$ .

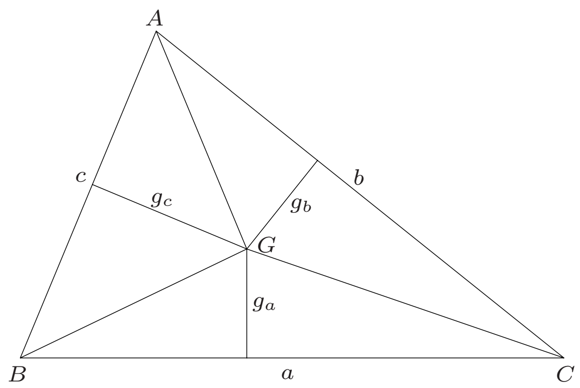
ii) De (1), haciendo los inversos y sumando resulta:

$$\frac{1}{g_a} + \frac{1}{g_b} + \frac{1}{g_c} = \frac{3a}{r(a+b+c)} + \frac{3b}{r(a+b+c)} + \frac{3c}{r(a+b+c)} = \frac{3}{r}.$$

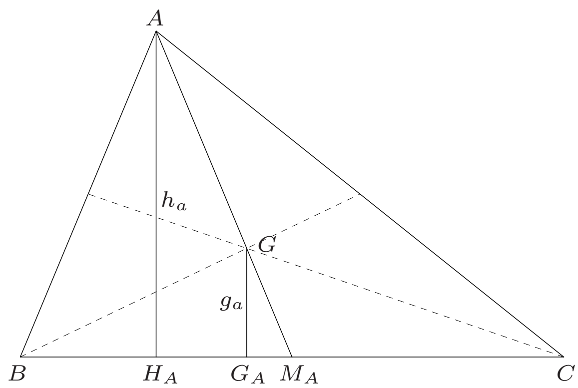
Finalmente, aplicando la desigualdad entre las medias aritmética y armónica, sale

$$\frac{g_a+g_b+g_c}{3} \geq \frac{3}{\frac{1}{g_a}+\frac{1}{g_b}+\frac{1}{g_c}} = \frac{3}{\frac{3}{r}} = r \quad \text{que equivale a} \quad \frac{g_a+g_b+g_c}{r} \geq 3.$$

*Observación.* Sumando las tres desigualdades de i) sólo obtenemos $\dfrac{g_a+g_b+g_c}{r} \geq 2.$




Primera solución




Segunda solución

*Segunda solución*

i) Consideremos los puntos $M_A$, $H_A$, $G_A$, indicados en la figura.
Denotaremos por $h_A$ la altura correspondiente a $A$, $p$ el semiperímetro y $S$ el área de $ABC$. Los triángulos $AM_AH_A$ y $GM_AG_A$ son semejantes, siendo 3 la razón de semejanza (propiedad del baricentro sobre cada mediana) y es

$$h_A = 3g_A. \tag{3}$$

Por la desigualdad triangular tenemos la cadena de equivalencias

$$b + c \geq a \iff 2p \geq 2a \iff p \geq a \iff \frac{a}{p} \leq 1$$

y multiplicando por $h_A$ y teniendo en cuenta (3) queda:

$$g_A \geq \frac{ah_A}{3p} \quad \text{o bien} \quad g_A \geq \frac{2S}{3p}$$

y finalmente, como $S = p\,r$, resulta $g_A \geq \dfrac{2}{3}r$. Análogamente obtendríamos las correspondientes desigualdades para $g_B$ y $g_C$ .

ii) Usaremos la desigualdad $x + \dfrac{1}{x} \geq 2$, válida para $x > 0$, que se deduce de la obvia $(x-1)^2 \geq 0$. Tenemos entonces

$$\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right) + \left(\frac{b}{c} + \frac{c}{b}\right) + \left(\frac{c}{a} + \frac{a}{c}\right) \geq 6.$$

Sumando, ordenando y operando resulta:

$$1 + \frac{a}{b} + \frac{a}{c} + \frac{b}{a} + 1 + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} + \frac{c}{b} + 1 \geq 9$$

que equivale a

$$a\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) + b\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) + c\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \geq 9$$

y sacando factor común, dividiendo por 3 y poniendo $2p = a + b + c$, queda

$$\frac{2p}{3a} + \frac{2p}{3b} + \frac{2p}{3c} \geq 3. \tag{4}$$

Por otra parte, como $3g_a = h_A, \quad 3g_b = h_B, \quad 3g_c = h_C$, resulta $2S = 3g_a a = 3g_b b = 3g_c c$. Despejando $3a$, $3b$ y $3c$ y sustituyendo en (4), queda:

$$(g_a + g_b + g_c)\,\frac{p}{S} \geq 3.$$

Finalmente usando de nuevo $S = p\,r$, resulta $\dfrac{g_a + g_b + g_c}{r} \geq 3$.

# OME 35. Problema 6. Solución

Supongamos que hay $x$ rectas en la primera familia, $y$ en la segunda y $z$ en la tercera. Las $x$ rectas de la primera familia determinan $x+1$ regiones. La primera recta de la segunda familia determina en el plano $2(x+1)$ regiones, las dos primeras $3(x+1)$, etc., hasta las $y$-ésima, que determina $(y+1)(x+1)$ regiones.
La primera recta de la tercera familia es cortada por las $x+y$ rectas existentes en $x+y+1$ partes y cada una de estas partes divide en dos a cada región existente de modo que el número de regiones se incrementa en $x+y+1$ regiones. Cada recta de la tercera familia aumenta las regiones existentes en la misma cantidad; luego el número total $N$ de regiones vale

$$N = (x+1)(y+1) + z(x+y+1) = x+y+z+xy+xz+yz+1 = n+m+1$$

con $n = x+y+z$ y $m = xy+xz+yz$.
Tenemos

$$m = x^2+y^2+z^2 - \frac{1}{2}\big((y-z)^2+(z-x)^2+(x-y)^2\big) \leq x^2+y^2+z^2.$$

Entonces

$$n^2 = x^2+y^2+z^2+2m \geq 3m \text{ que equivale a } m \leq \frac{n^2}{3} \text{ y } N = n+m+1 \leq n+\frac{n^2}{3}+1.$$

Para $n = 76$ es $n^2 + n^2/3 + 1 > 2002$. Así, si $n = 76 = x+y+z$ con $x = 26$, $y = 25$, $z = 25$, resulta $m = 1925$ y $N = 2002$.

# OME 36. Problema 1. Solución

Las raíces comunes a ambos polinomios serán raíces de la diferencia

$$P(x) - Q(x) = (a-c)x^3 + (c-a)x.$$

Resolvemos la ecuación $P(x) - Q(x) = 0$, sacando primero $x$ factor común

$$x\Big((a-c)x^2 + (c-a)\Big) = 0.$$

Las tres raíces son 0, 1 y $-1$, y entre ellas tienen que estar las raíces comunes.
Como 0 no es raíz ni de $P(x)$ ni de $Q(x)$, las dos raíces comunes tienen que ser 1 y $-1$.
Sustituyendo estos valores en $P(x)$ y $Q(x)$ obtenemos el sistema

$$\begin{cases} 2+a+b+c=0 \\ 2-a+b-c=0 \end{cases}$$

que nos da las condiciones

$$\begin{aligned} b &= -2 \\ a &= -c \end{aligned}$$

y los polinomios quedan en la forma:

$$\begin{aligned} P(x) &= x^4 + ax^3 - 2x^2 - ax + 1 \\ Q(x) &= x^4 - ax^3 - 2x^2 + ax + 1. \end{aligned}$$

Para resolver las ecuaciones $P(x) = 0$, $Q(x) = 0$, separamos por Ruffini las raíces conocida 1 y $-1$ y quedan las ecuaciones en la forma

$$\begin{aligned} P(x) &= (x+1)(x-1)(x^2 + ax - 1) = 0 \\ Q(x) &= (x+1)(x-1)(x^2 - ax - 1) = 0. \end{aligned}$$

Resolviendo las ecuaciones de segundo grado queda finalmente:
Soluciones de $P(x) = 0$,

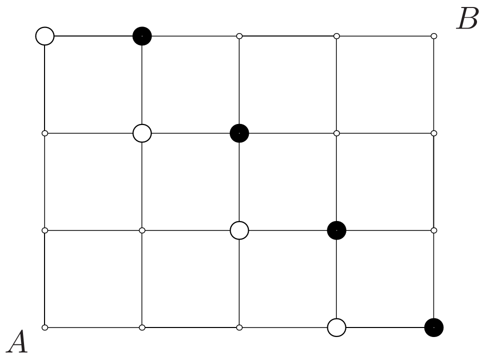
$$x = 1,\ x = -1,\ x = \frac{-a + \sqrt{a^2+4}}{2},\ x = \frac{-a - \sqrt{a^2+4}}{2}.$$

Soluciones de $Q(x) = 0$,

$$x = 1,\ x = -1,\ x = \frac{a + \sqrt{a^2+4}}{2},\ x = \frac{a - \sqrt{a^2+4}}{2}.$$

**OME 36. Problema 2. Solución**

Definamos un sistema de coordenadas con origen en $A$ y unidad el lado de un cuadrado.
Como $P$ y $Q$ recorren caminos de longitud mínima, $P$ sólo puede ir a la derecha o arriba y $Q$ a la izquierda o abajo. Todos los caminos tienen longitud 7, y $P$ y $Q$ sólo se podrán encontrar entre el tercero y el cuarto movimiento. En la figura se han marcado con puntos blancos todas las posibles posiciones de $P$ tras el tercer movimiento y con puntos negros las de $Q$.




Caso 1. $P$ llega a $(0,3)$.

La probabilidad de que $P$ llegue a $(0,3)$ es $\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{2} = \frac{1}{8}$. Sólo se puede cruzar con $Q$ si éste está en $(1,3)$, lo que sucede también con probabilidad $\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{2} = \frac{1}{8}$.
$P$ está obligado a pasar a $(1,3)$ pero $Q$ pasa a $(0,3)$ con probabilidad $\frac{1}{2}$. La probabilidad de que se crucen entre $(0,3)$ y $(1,3)$ es $\frac{1}{8}\,\frac{1}{8}\,\frac{1}{2} = \frac{1}{2^7}$.

Caso 2. $P$ llega a $(1,2)$.

La probabilidad de que $P$ llegue a $(1,2)$ es $3\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{3}{8}$ ya que hay tres modos de llegar $(1,2)$. Sólo se puede cruzar con $Q$ si éste está en $(1,3)$ o en $(2,2)$. Distingamos ambos casos:
a) $Q$ llega a $(1,3)$ con probabilidad $\frac{1}{8}$, y entonces se cruzarán entre $(1,2)$ y $(1,3)$ si $P$ se mueve hacia $(1,3)$ y $Q$ hacia $(1,2)$, ambos movimientos con probabilidad $\frac{1}{2}$. La probabilidad de cruzarse es $\frac{3}{8}\frac{1}{8}\frac{1}{2}\frac{1}{2} = \frac{3}{2^8}$.
b) $Q$ llega a $(2,2)$ con probabilidad $\frac{3}{8}$, y entonces se cruzarán entre $(1,2)$ y $(2,2)$ si $P$ se mueve hacia $(2,2)$ y $Q$ hacia $(1,2)$, ambos movimientos con probabilidad $\frac{1}{2}$. La probabilidad de cruzarse es $\frac{3}{8}\frac{3}{8}\frac{1}{2}\frac{1}{2} = \frac{9}{2^8}$.

Caso 3. $P$ llega a $(2,1)$.

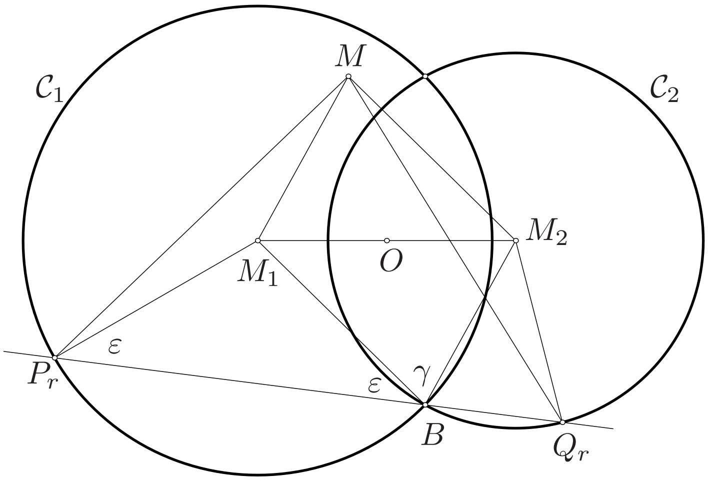
Procediendo de modo análogo, la probabilidad de cruzarse entre los puntos $(2,1)$ y $(2,2)$ es $\frac{9}{2^8}$ y la de cruzarse entre $(2,1)$ y $(3,1)$ es $\frac{9}{2^8}$.

Caso 4. $P$ llega a $(3,0)$. La probabilidad de cruzarse entre $(3,0)$ y $(3,1)$ es $\frac{3}{2^8}$ y la de cruzarse entre $(3,0)$ y $(4,0)$ es $\frac{1}{2^7}$.

La probabilidad pedida es la suma de todos los casos y resulta ser

$$\frac{1}{2^7} + \frac{3}{2^8} + \frac{9}{2^8} + \frac{9}{2^8} + \frac{9}{2^8} + \frac{3}{2^8} + \frac{1}{2^7} = \frac{37}{256}$$

## OME 36. Problema 3. Solución




Sea $O$ el punto medio del segmento $M_1M_2$. Vamos a demostrar que todas las mediatrices de los segmentos $P_rQ_r$ pasan por el simétrico de $B$ respecto de $O$.
Sean $\varepsilon = \widehat{P_rBM_1}$, $\gamma = \widehat{M_1BM_2}$. Entonces:

$$\widehat{M_2BQ_r} = 180° - (\gamma + \varepsilon)$$

y como el triángulo $M_2BQ_r$ es isósceles,

$$\widehat{BM_2Q_r} = 180° - 2\,\widehat{M_2BQ_r} = -180° + 2\,(\gamma + \varepsilon)$$

y por tanto,

$$\widehat{MM_2Q_r} = 180° - \gamma + \widehat{BM_2Q_r} = 180° - \gamma - 180° + 2\,(\gamma + \varepsilon) = \gamma + 2\,\varepsilon.$$

De modo análogo, por ser el triángulo $P_rM_1B$ isósceles, se tiene

$$\widehat{P_rM_1B} = 180° - 2\,\varepsilon$$

y

$$\widehat{P_rM_1M} = 360° - (\widehat{P_rM_1B} + 180° - \gamma) = 360° - 180° + 2\,\varepsilon - 180° + \gamma = 2\,\varepsilon + \gamma.$$

Resulta que para cualquier posición de la recta variable, los triángulos $MM_1P_r$ y $MM_2Q_r$ son iguales y por tanto $MP_r = MQ_r$ y $M$ está en la mediatriz de $P_rQ_r$.
Como $M$ no depende de la recta variable queda probada la propiedad del enunciado.

## OME 36. Problema 4. Solución

De la condición a) sale $z = E\left(\frac{N}{3}\right) = 111 \cdot k$ para todo $k \in \mathbb{N}$, $\quad 1 \leq k \leq 9$.
De la condición b) sale $z = E\left(\frac{N}{3}\right) = 1 + 2 + 3 + \cdots + n$, o bien, $z = \frac{n(n+1)}{2}$, que equivale a $n^2 + n - 2z = 0$, es decir, $n = \frac{-1 + \sqrt{1 + 8z}}{2}$. (La otra raíz es negativa).
Juntando las dos condiciones, queda:

$$n = \frac{-1 + \sqrt{1 + 8 \cdot 111 \cdot k}}{2}$$

Como $n$ es natural, el radicando ha ser cuadrado perfecto, lo que ocurre sólo para $k = 6$, que sustituido en la expresión anterior resulta $n = 36$.
Recuperando la condición a) sale

$$z = E\left(\frac{N}{3}\right) = 111 \cdot 6 = 666$$

lo que da

$$667 > \frac{N}{3} \geq 666 \text{ o bien } \quad 2001 > N \geq 1998.$$

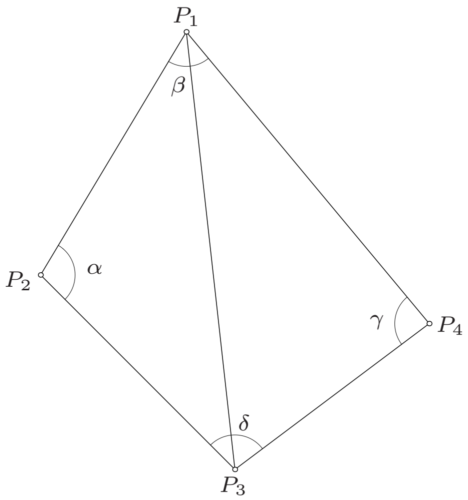
En consecuancia, el mayor $N$ que cumple a) y b) es $N = 2000$.

## OME 36. Problema 5. Solución

Vamos a demostrarlo por reducción al absurdo. Supongamos que distribuimos 4 puntos en el cuadrado de manera que cada una de las seis distancias sea mayor que 1. Entonces hay dos posibilidades:

1) Los cuatro puntos forman un cuadrilátero convexo.

2) Los cuatro puntos forman un cuadrilátero no convexo.




Veamos ambos casos:

Caso 1) Sean $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ los ángulos del cuadrilátero convexo. Sabemos que $\alpha+\beta+\gamma+\delta = 360°$. Además cualquier pareja de puntos del interior (o frontera) del cuadrado están a una distancia $d \leq \sqrt{2}$ ya que el diámetro de dicho cuadrado es $\sqrt{2}$.

De la condición $\alpha+\beta+\gamma+\delta = 360°$, se deduce que necesariamente uno de los ángulos ha de ser mayor o igual que $90°$, digamos por ejemplo $\alpha \geq 90°$.

Tenemos (ver figura):

$$P_iP_j > 1, \;\; i \neq j$$

luego

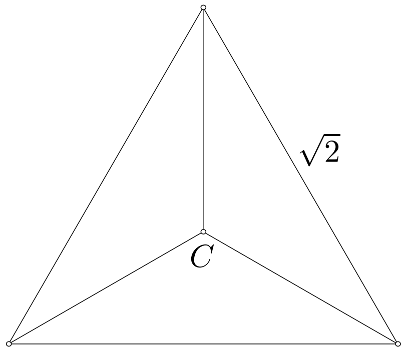
$$\overline{P_1P_3}^2 = \overline{P_1P_2}^2 + \overline{P_2P_3}^2 - 2\overline{P_1P_2}\cdot\overline{P_2P_3}\,\cos\alpha$$

y como el cuadrilátero es convexo, $90° \leq \alpha \leq 180°$ y por tanto $\cos\alpha \leq 0$ y en consecuencia:

$$\overline{P_1P_3}^2 \geq \overline{P_1P_2}^2 + \overline{P_2P_3}^2 > 2 \;\text{ de donde sale }\; \overline{P_1P_3} > \sqrt{2}.$$

lo que es imposible.

Caso 2) Si se forma un cuadrilátero no convexo podemos elegir tres de los cuatro puntos formando un triángulo de modo que el cuarto punto sea interior. Supongamos que el punto interior es $P_4$.




Cada lado de dicho triángulo es menor o igual que $\sqrt{2}$ (diámetro del cuadrado) y por tanto estará contenido en un triángulo equilátero de lado $\sqrt{2}$, y circunradio $\sqrt{2}\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{2}{3} = \sqrt{\frac{2}{3}} < 1$. Si su centro es $C$, el punto $P_4$ estará en el interior de uno de los tres triángulos que resultan de unir $C$ con cada vértice y la distancia de $\mathrm{P}_4$ a uno de los vértices será menor o igual que el circunradio, es decir menor que $\sqrt{\frac{2}{3}}$ y por tanto menor que 1. Hemos encontrado pues un par de puntos a distancia menor o igual que 1.
Por último si tres puntos están alineados se reduce al caso b) y si los cuatro puntos están alineados llamando $x_1$, $x_2$, $x_3$ a las distancias entre puntos consecutivos, tenemos

$$x_1 + x_2 + x_3 \leq \sqrt{2}$$

y por el principio del palomar, uno de ellos, digamos $x_1$, cumple $x_1 \leq \dfrac{\sqrt{2}}{3} < 1$.

## OME 36. Problema 6. Solución

Supongamos que exista $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tal que $f\big(f(n)\big) = n + 1$.
Se tiene que $f(0) = a \in \mathbb{N}$ . Por el enunciado

$$f\big(f(0)\big) = 1; \quad f\big(f(0)\big) = f(a) = 1,$$

y del mismo modo,

$$f(1) = a + 1, f(a + 1) = 2, f(2) = a + 2, \ldots$$

Supongamos que $f(n-1) = a+n-1$; entonces $f(a+n-1) = a+n$. Luego hemos probado por inducción que

$$f\big(f(n)\big) = f(a + n) = 2a + n.$$

Entonces se tiene que cumplir,

$$2a + n = n + 1$$

lo que implica

$$a = \frac{1}{2} \notin \mathbb{N}.$$

Hemos llegado a una contradicción y la condición supuesta es falsa con lo que queda demostrado la inexistencia de la función $f$.

## OME 37. Problema 1. Solución

Supongamos primero que exista el polinomio $P$ que cumple las condiciones requeridas. Sea $x - a = h$ ó $x = a + h$. Entonces

$$\begin{cases} P(a-h) = b - h\,Q(h^2) \\ P(a+h) = b + h\,Q(h^2) \end{cases} \text{ y } \quad \frac{P(a-h)+P(a+h)}{2} = b, \quad \text{para todo} \quad h \in \mathbb{R}.$$

Esto indica que la gráfica de $P$ es simétrica respecto del punto $A(a, b)$.
Sea $x = a + h$, $P(x) = P(a + h) = R(h)$.
Como $P(a - h) = R(-h)$, la condición $\dfrac{P(a-h)+P(a+h)}{2} = b$ es equivalente a $R(-h) + R(h) = 2h$. Para $R(h) = a_0 + a_1 h + \cdots + a_n h^n$, la condición anterior se escribe de la forma

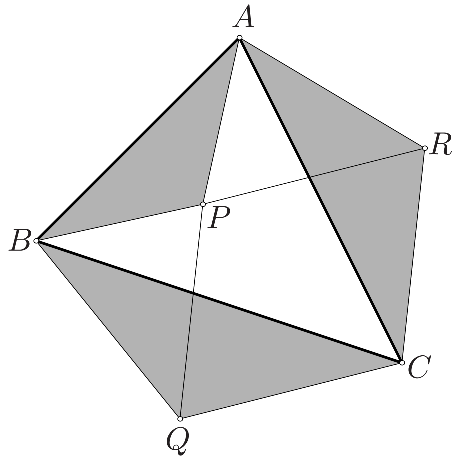
$$a_0 + a_1 h + \cdots + a_n h^n + a_0 - a_1 + a_2 h^2 - \cdots + (-1)^n a_n h^n = 2b$$

es decir $a_0 + a_2 h^2 + \cdots + a_m h^m = b$, para cada $h \in \mathbb{R}$, con $m = n$ si $n$ es par o $m = n - 1$ si $n$ es impar.
Deducimos que $a_2 = a_4 = \cdots = a_m = 0, \quad a_0 = b$.
Por tanto ahora se tiene que los términos de $R$ son el independiente y los que contienen potencias impares de $h$

$$R(h) = b + a_1 h + a_3 h^3 + \cdots$$

y así existe un polinomio $Q$ tal que $R(h) = b + h\,Q(h^2)$, para algún polinomio $Q$.
Por último, volvemos a la variable $x$: $P(x) = R(h) = b + (x - a)\,Q\big((x - a)^2\big)$.

## OME 37. Problema 2. Solución




Los triángulos $ABC$ y $PBQ$ son semejantes pues tienen un ángulo igual $\widehat{ABC} = \widehat{PBQ}$ y los lados que lo forman proporcionales

$$\frac{c}{a} = \frac{BP}{BQ}.$$

De modo análogo, $ABC$ es semejante a $APR$, y por tanto $PBQ$ y $APR$ son semejantes (y al ser $PB = PA$ son iguales). En particular, $\widehat{ARP} = \widehat{ACB}$ y $\widehat{BQP} = \widehat{ACB}$
Llamando $\alpha = \widehat{BAP} = \widehat{ABP}$, resulta:

$$\widehat{QPR} = 360° - (180° - 2\alpha) - (A + B) = 180° + 2\alpha - (180° - \widehat{ACB}) = 2\alpha + \widehat{ACB},$$

$$\widehat{QCR} = \widehat{ACB} + 2\alpha,$$

$$\widehat{PRC} = 180° - 2\alpha - \widehat{ARP} = 180° - 2\alpha - \widehat{ACB},$$

$$\widehat{PQC} = 180° - 2\alpha - \widehat{BQP} = 180° - 2\alpha - \widehat{ACB}.$$

Las cuatro igualdades establecen que los dos pares de ángulos opuestos del cuadrilátero $PQCR$ son iguales y es un paralelogramo.
La alineación es un caso particular y se producirá cuando $\widehat{ACB} + 2\alpha = 180°$, es decir cuando

$$\alpha = \frac{180° - \widehat{ACB}}{2}.$$

## OME 37. Problema 3. Solución

Supongamos que $0 < a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq a_4 \leq a_5$. Si ningún triángulo es acutángulo, tendríamos:

$$\begin{cases} a_1^2 + a_2^2 \leq a_3^2 & (1) \\ a_2^2 + a_3^2 \leq a_4^2 & (2) \\ a_3^2 + a_4^2 \leq a_5^2 & (3) \end{cases}$$

Pero por la desigualdad triangular,

$$a_5 < a_1 + a_2, \quad \text{luego} \quad a_5^2 < a_1^2 + a_2^2 + 2a_1a_2. \qquad (4)$$

Sumando las desigualdades (1),(2),(3) y (4) tenemos

$$a_1^2 + 2a_2^2 + 2a_3^2 + a_4^2 + a_5^2 < a_3^2 + a_4^2 + a_5^2 + a_1^2 + a_2^2 + 2a_1a_2,$$

es decir,

$$a_2^2 + a_3^2 < 2a_1a_2.$$

Como $a_2 \leq a_3$, resulta $2a_2^2 \leq a_2^2 + a_3^2 < 2a_1a_2$, y por tanto $a_2 < a_1$, en contradicción con la ordenación inicial.

**OME 37. Problema 4. Solución**

Consideremos la distribución

| | | |
|---|---|---|
| $a$ | $b$ | $c$ |
| $d$ | $e$ | $f$ |
| $g$ | $h$ | $i$ |

Resulta

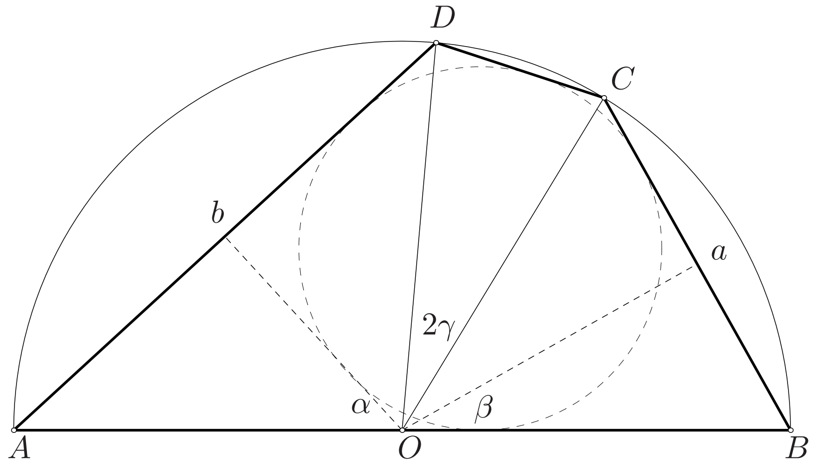
$$\begin{aligned} S &= abc + def + ghi + adg + beh + cfi = \\ &= 100(a+c+b+a+d+g) + 10(d+e+f+b+e+h) + (g+h+i+c+f+i) = \\ &= 200a + 110b + 101c + 110d + 20e + 11f + 101g + 11h + 2i. \end{aligned}$$

Calculando módulo 9 tenemos

$$S = 2(a+b+\cdots+h+i) = 2\cdot 45 = 0.$$

Como 2001 no es múltiplo de 9, no habrá ninguna distribución para la que la suma indicada tome el valor 2001.

## OME 37. Problema 5. Solución




Sea $O$ el centro de la semicircunferencia. Pongamos $a = BC$; $b = AD$; $p = CD$; $2\alpha = \widehat{BOC}$; $2\beta = \widehat{AOD}$; $2\gamma = \widehat{COD}$.
La condición necesaria y suficiente para que $ABCD$ admita una circunferencia inscrita es

$$p + 2 = a + b. \tag{1}$$

Como $2\alpha + 2\beta + 2\gamma = 180°$, entonces $\beta = 90° - (\alpha + \gamma)$ y además

$$a = 2\,\text{sen}\,\alpha; \quad p = 2\,\text{sen}\,\gamma; \quad b = 2\,\text{sen}\,\beta = 2\cos(\alpha+\gamma) = 2\cos\alpha\cos\gamma - 2\,\text{sen}\,\alpha\,\text{sen}\,\gamma.$$

Vamos a expresar la condición (1) en función del ángulo $\alpha$ y el dato $p$ que determina por completo el cuadrilátero.

$$\cos\gamma = \sqrt{1 - \frac{p^2}{4}} = \frac{\sqrt{4-p^2}}{2},$$

de donde

$$b = \sqrt{4-p^2}\,\cos\alpha - p\,\text{sen}\,\alpha$$

sustituyendo en (1), queda

$$p + 2 = 2\,\text{sen}\,\alpha + \sqrt{4-p^2}\,\cos\alpha - p\,\text{sen}\,\alpha$$

o lo que es lo mismo

$$\sqrt{4-p^2}\,\cos\alpha + (2-p)\,\text{sen}\,\alpha = p + 2. \tag{2}$$

Por tanto, existirá circunferencia inscrita para los valores de $p$ que hagan compatible la ecuación (2) en la incógnita $\alpha$.
Puede expresarse el seno en función del coseno y estudiar el discriminante de la ecuación de segundo grado que se obtiene, pero es más rápido interpretar la ecuación (2) como el

producto escalar de los vectores $\vec{u} = (\cos\alpha, \operatorname{sen}\alpha)$ de módulo 1 y $\vec{v} = (\sqrt{4-p^2}, 2-p)$. La condición (2) queda:

$$|\vec{v}|\cos\delta = p+2 \tag{3}$$

siendo $\delta$ el ángulo formado por los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$.
Para que (3) sea compatible debe cumplirse $p+2 \le |\vec{v}| = \sqrt{4-p^2+(2-p)^2}$, y elevando al cuadrado y operando queda

$$p^2 + 8p - 4 \le 0.$$

Las raíces de la ecuación son $p = \pm 2\sqrt{5} - 4$. Como $p$ es positivo la condición final es:

$$0 \le p \le 2\sqrt{5} - 4.$$

**OME 37. Problema 6. Solución**

Para cada número natural $n$ definimos $f(n)$ como la suma de las cifras de la expresión de $n$ escrito en base 2. Está claro que esta función $f$ cumple las condiciones a) y b). Además, es la única función que las cumple, porque el valor de $f(n)$ viene determinado por las condiciones a) y b).
Probamos esa afirmación por inducción sobre $n$. Si $n = 1$ o $n = 2^s$, entonces $f(n) = 1$.
Supongamos $n > 1$, $n \neq 2^s$ y que es conocido $f(m)$ para todo $m < n$; se puede escribir $n = 2^s + m$ con $m < 2^s$ tomando $2^s$ la mayor potencia de 2 que es menor que $n$; entonces $f(n) = f(m) + 1$.
Ahora, es fácil resolver las dos cuestiones que nos plantean:
En el primer caso, se trata de ver cuántos unos puede tener como máximo un número menor o igual que 2001 escrito en base 2. Ese número, escrito en base 2, es, obviamente, 1111111111, que corresponde a $n = 1023 = 2^{10} - 1$. Es $f(n) = 10$.
En el segundo caso, razonando de manera análoga, se observa que la respuesta es

$$n = 2^{2001} - 1.$$

# OME 38. Problema 1. Solución

La ecuación funcional dada

$$P(x^2 - y^2) = P(x+y)\,P(x-y) \tag{*}$$

es equivalente a la ecuación funcional

$$P(uv) = P(u)\,P(v) \tag{**}$$

con el cambio de variables $u = x + y$ y $v = x - y$, para todo $u, v \in \mathbb{R}$.
Poniendo $u = v = 0$ en (**) se obtiene $P(0) = (P(0))^2$, de donde $P(0) = 1$ ó $P(0) = 0$. Si $P(0) = 1$, haciendo $v = 0$ en (**) se deduce que $P(0) = P(u)\,P(0)$ para todo $u \in \mathbb{R}$, es decir $P(u) \equiv 1$. Sea ahora $P(0) = 0$. Entonces $P(u) = u\,Q(u)$, siendo $Q(u)$ un polinomio de grado una unidad inferior al grado de $P(u)$. Fácilmente se comprueba que $Q(u)$ satisface la ecuación funcional (**). Por tanto $P(u) = u^n$ con $n \in \mathbb{N}$.
Recíprocamente, se comprueba sin dificultad que $P(x) \equiv 1$ y $P(x) = x^n$ con $n \in \mathbb{N}$ satisfacen la ecuación funcional inicial (*).
Además está la solución trivial $P(x) \equiv 0$.

**OME 38. Problema 2. Solución**

Para resolver la primera cuestión tenemos,

$$BA' = c\cos B, \quad \tan HBA' = \cot C = \frac{HA'}{BA'}, \quad AA' = c\operatorname{sen} B.$$

Deducimos

$$k = \frac{AA'}{HA'} = \frac{c\operatorname{sen} B}{c\cos B\cot C}, \quad \text{de donde} \quad \tan B\cdot\tan C = k. \tag{1}$$

Resolvamos la segunda cuestión. Poniendo $a = BC$, tomando unos ejes con origen en el punto medio de $BC$ y eje $OX$ sobre el lado $BC$, resulta $B(-\frac{a}{2},0)$, $C(\frac{a}{2},0)$, y llamando $A(x,y)$, la condición (1) se escribe

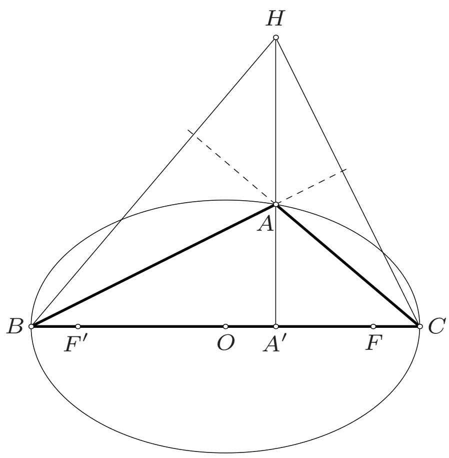
$$\frac{y}{\frac{a}{2}-x}\cdot\frac{y}{\frac{a}{2}+x} = k \ \text{ que también es } \quad y^2 = k\left(\frac{a^2}{4}-x^2\right)$$

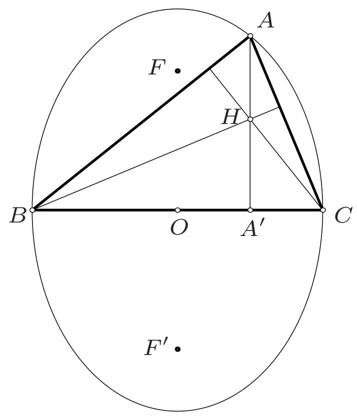
que, una vez operada resulta:

$$\frac{x^2}{\frac{a^2}{4}} + \frac{y^2}{\frac{ka^2}{4}} = 1, \tag{2}$$

ecuación de una elipse. Podremos distinguir dos casos.

Si $k < 1$, elipse con eje mayor sobre $OX$ , semidistancia focal $c_1 = \dfrac{a}{2}\sqrt{1-k}$ y semieje mayor $a_1 = \dfrac{a}{2}$




Si $k > 1$, se trata de una elipse con eje mayor sobre $OY$, semidistancia focal $c_1 = \dfrac{a}{2}\sqrt{k-1}$ y semieje mayor $a_1 = \dfrac{a}{2}$.

**OME 38. Problema 3. Solución**

Dado cualquier natural $n$, consideramos su representación binaria,

$$n = a_k 2^k + a_{k-1} 2^{k-1} + \cdots + a_1 2 + a_0 = a_k \ldots a_1 a_0\,_{(2},$$

donde $a_j = 0$ ó $1$.

Probaremos por inducción sobre $k$ que $g(n) = \sum_{j=0}^{k} a_j$.

Para $k = 0$ es cierto: $g(1\,_{(2}) = g(1) = 1$.

Supuesto cierto para $k$, hay dos casos para $k+1$:

$$g\left(a_k \ldots a_1 a_0 0_{(2}\right) = g\left(2 \cdot a_k \ldots a_1 a_0\,_{(2}\right) = \sum_{j=0}^{k} a_j,$$

$$g\left(a_k \ldots a_1 a_0 1\,_{(2}\right) = g\left(1 + 2 \cdot a_k \ldots a_1 a_0\,_{(2}\right) = 1 + \sum_{j=0}^{k} a_j$$

donde se han aplicado las propiedades de $g$ y la hipótesis inductiva.

Entonces $g(n)$ es el número de unos de $n$ escrito en base 2.

Como $2^{11} = 2048 > 2002 > 1024 = 2^{10}$, resulta $M = 10$.

Hay cinco valores de $n$ que hacen $g(n) = 10$: 1023, 1535, 1791, 1919 y 1983.

**OME 38. Problema 4. Solución**

Tenemos las expresiones (en base 10)

$$n = abc = c + 10b + 100a$$
$$m = cba = 100c + 10b + a$$

que, sustituidas en $2m + S = n$ nos da

$$200c + 20b + 2a + (a + b + c) = 100a + 10b + c,$$

es decir

$$200c + 11b - 97a = 0.$$

Por lo tanto, $200c - 97a$ es múltiplo de 11.
Calculando módulo 11 la expresión anterior sale $2(c + a) \equiv 0$ , y como $\operatorname{mcd}(2, 11) = 1$, resulta que $a + c$ es congruente con 0 módulo 11.
Calculando módulo 9: $2(c + a + b) \equiv 0$, y $c + a + b$ es congruente con 0.
Por la primera congruencia, $c + a = 0$, o bien $c + a = 11$.
Si $c + a = 0$, entonces $a = c = 0$ y no hay solución por ser números de tres cifras. Si $c + a = 11$, entonces $b = 7$ y por lo tanto, $200c - 97a$ es múltiplo de 7.
Trabajando módulo 7 queda $4c + a$ es congruente con 0 módulo 7, es decir;

$$4c + a = 0, 7, 14, 21, 28, 35, 42.$$

Como $a + c = 11$, tenemos que $3c$ debe tomar uno de los valores $-11$, $-4$, 3, 10, 17, 24, o 31 y ser múltiplo de 3. Luego $c = 1$ o $c = 8$.
Si $c = 1$, entonces $a = 10$, lo que es imposible.
Si $c = 8$, debe ser $a = 3$. Pero $n = 378$ no es solución y, en conclusión, no existen números con las condiciones pedidas.

**OME 38. Problema 5. Solución**

Cada segmento determina dos vectores de igual módulo y sentido opuesto.
Consideramos los $2 \cdot 2002 = 4004$ vectores así obtenidos y los ordenamos por sus direcciones entre 0 y $2\pi$ respecto de un sistema de referencia ortonormal arbitrario.
Construimos ahora un polígono convexo de 4004 lados "uniendo" los vectores uno a continuación del otro, a partir de uno cualquiera dado.
Claramente el perímetro de este polígono es 2. Además es un polígono centrado y simétrico, respecto de un punto $O$.
Tomamos entonces uno de los lados más próximos a $O$; sea $d$ el segmento perpendicular a ese lado y a su opuesto que pasa por el centro $O$. La proyección del polígono sobre la recta que contiene a este segmento es $d$ y por tanto la suma de las proyecciones sobre la recta anterior es también $d$. Por otra parte la circunferencia de centro $O$ y radio $\frac{d}{2}$ está totalmente contenida en el interior del polígono y entonces su circunferencia es menor que el perímetro del polígono.
Es decir: $d\pi < 2$ y $d < \frac{2}{\pi} < \frac{2}{3}$.
Falta considerar el caso trivial de que todos los segmentos tengan la misma dirección en cuyo caso no hay polígono. Pero podemos tomar la recta perpendicular a la dirección común sale $d = 0$.

**OME 38. Problema 6. Solución**

Debido a que el número de lados del polígono $H$ deja de resto 1 al dividirse entre seis, cada diagonal y cada lado del polígono pertenece sólo (exactamente) a tres triángulos isósceles distintos.
Denotamos por $AA$, $AR$ y $RR$ los números de segmentos que son lados y diagonales cuyos extremos respectivamente están coloreados ambos de azul, de azul y de rojo o ambos de rojo. Análogamente denotamos por $AAA$, $AAR$, $ARR$ y $RRR$ el número de triángulos isósceles cuyos vértices son los tres azules, dos azules y uno rojo, uno azul y dos rojos o los tres rojos y ninguno azul, respectivamente.
Entonces $3 \times AA = 3 \times AAA + AAR$, porque cada diagonal o lado de $H$ pertenece a tres triángulos isósceles y los triángulos isósceles con tres vértices azules tienen tres lados con sus dos extremos azules. Los triángulos isósceles con dos vértices azules tienen sólo un lado con sus extremos de color azul y los triángulos isósceles con menos de dos vértices azules no tiene ningún lado con los extremos del mismo color azul.
Análogamente establecemos $3 \times RA = 2 \times AAR + 2 \times ARR$ y $3 \times RR = ARR + 3 \times RRR$.
Las tres relaciones obtenidas conducen a

$$AAA + RRR = RR + AA - \frac{1}{2} \times RA = \frac{1}{2} \times R \times (R-1) + \frac{1}{2} \times A \times (A-1) - \frac{1}{2} \times R \times A,$$

donde $A$ es el número de vértices azules, $A = 6n + 1 - R$. Esto completa la prueba.
Observemos que el resultado es también cierto si el polígono $H$ tiene $6n + 5$ lados.

## OME 39. Problema 1. Solución

Sea $a_i$ el número compuesto por $i$ nueves $a_i = \overbrace{99\cdots 9}^{i}$.
Supongamos que existe $p$ tal que $p \nmid a_i \ \forall i \in \mathbb{N}$, para probar por contradicción el enunciado. Considérense en dicho caso los números $\{a_1, a_2, \dots, a_p\}$. En este conjunto sabemos por hipótesis que no hay ningún $a_i \equiv 0 \pmod{p}$. Por tanto al haber $p$ números y sólo $p-1$ restos posibles módulo $p$, se sabe que existen $m$, $n$ tales que $a_m - a_n \equiv 0 \pmod{p}$. Suponemos sin pérdida de generalidad que $m > n$ y tenemos

$$p \big| (a_m - a_n) = \overbrace{99\dots9}^{m} - \overbrace{99\dots9}^{n} = \overbrace{99\dots9}^{m-n}\overbrace{00\dots0}^{n} = a_{m-n} \cdot 10^n.$$

Como $p \neq 2$ y $p \neq 5$ resulta que $p \nmid 10^n = 2^n \cdot 5^n$, es decir que $p \big| a_{m-n}$ y como $a_{m-n}$ pertenece al conjunto escogido por ser $m - n < n$ y $m - n \geq 1$, se ha llegado a una contradicción. Por consiguiente

$$\forall p \, \exists \, a_i \ \text{ tal que } \ p \big| a_i$$

y el enunciado queda probado.

**OME 39. Problema 2. Solución**

Como $M$ es finito, necesariamente estará acotado.
Pongamos $M \subset [x, y]$, con $x = \min(M)$ e $y = \max(M)$.
Supongamos en primer lugar que $x \leq 0$. Tenemos $x \leq 0 \Rightarrow 2x \leq x \Rightarrow 2x - k^2 < x$ para cualquier número $k \in M$. Esto contradice que $x$ sea el mínimo de $M$. Por tanto $x$ debe ser mayor que 0 y se tiene $0 < x < y$.
En cualquier caso debe ser

$$x \leq 2x - y^2 \leq y \tag{1}$$

y además

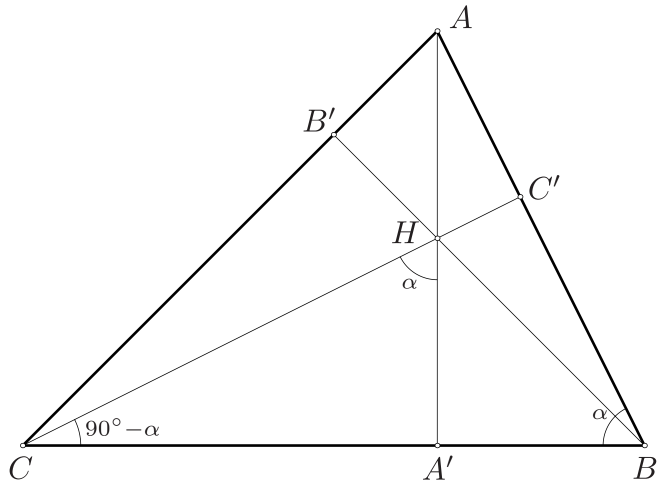
$$x \leq 2y - y^2 \leq y. \tag{2}$$

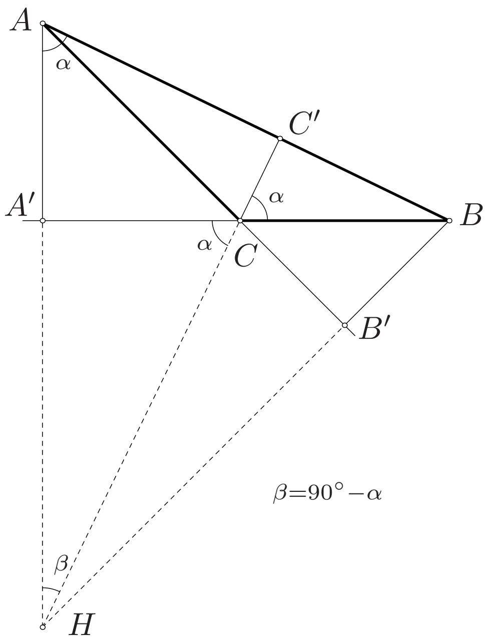
De (1) se desprende que : $x \leq 2x - y^2$ o bien que $0 \leq x - y^2$, es decir $y^2 \leq x < y$; esto sólo se cumple si $y \in (0, 1)$.
De (2) obtenemos que $2y - y^2 \leq y$, es decir, $y - y^2 \leq 0$, o bien $y \leq y^2$; y esto sólo es cierto si $y \in [1, +\infty)$.
Como (1) y (2) deben cumplirse a la vez, no existe ningún $y \in \mathbb{R}$ que pueda ser máximo de $M$ por lo que $M$ no puede estar acotado y no puede ser finito.

**OME 39. Problema 3. Solución**

*Primer caso:* $C < 90°$.

Llamaremos $A'$ al punto en que la altura de $A$ corta al lado $BC$ del triángulo $ABC$, y $C'$ al punto donde la altura de $C$ corta al lado $AB$ del triángulo $ABC$.
El ángulo $\widehat{CHA'}$ es igual al ángulo $\widehat{AHC'}$. En el triángulo $CA'H$, el ángulo $\widehat{CA'H}$ es recto, y por tanto el ángulo $\widehat{HCA'}$ es $90° - \alpha$.
En el triángulo $AHC'$, el ángulo $\widehat{HC'A}$ es recto, y por tanto el ángulo $\widehat{HAC'}$ es $90° - \alpha$.
El ángulo $\widehat{HAC'}$ es igual al ángulo $\widehat{A'AB}$ del triángulo $A'AB$ que es rectángulo, y por tanto el ángulo $\widehat{A'BA}$ es $\alpha$.
De aquí concluimos que los triángulos $CHA'$ y $A'AB$ son semejantes, y como $CH = AB$, son triángulos iguales; de donde obtenemos que $AA' = CA'$, y por tanto el valor de la tangente del ángulo pedido es $\tan C = 1$, y $C = 45°$.




*Segundo caso:* $C > 90°$.

Procediendo de modo análogo, se tiene $\widehat{A'CH} = \widehat{C'CB}$ . En el triángulo $C'CB$, el ángulo $\widehat{CA'H}$ es recto, y por tanto, $\widehat{A'HC} = 90° - \alpha$, y en el triángulo $CC'B$ el ángulo $\widehat{CC'B}$ es recto y por tanto $\widehat{C'BC} = 90° - \alpha$.
El triángulo $AA'B$ es rectángulo en $A'$ y por ello $\widehat{BAA'} = \alpha$.
Entonces los triángulos $AA'B$ y $A'CH$ son semejantes y tienen la hipotenusa igual, luego son iguales y deducimos $AA' = A'C$, de donde la tangente de $C$ vale $\tan C = -1$ y $C = 135^o$.

*Tercer caso:* $C = 90°$.

En este caso $C$ coincide con $H$ y $CH = 0$. Como $AB \neq 0$, este valor de $C$ no es válido.

# OME 39. Problema 4. Solución

Primero veamos que $x$ no puede ser entero. Esto puede hacerse teniendo en cuenta que si lo fuese, sería un divisor de 20, y basta probar los 8 divisores para comprobar que ninguno cumple la ecuación.
Otro modo de verlo es comprobar que $f(x) = x^3 + 2x^2 + 10x - 20$ es estrictamente creciente (su derivada es positiva para todo $x$) y además $f(1) = 13$ y $f(2) = 36$. Luego no hay raíces enteras.
Veamos que $x$ no puede ser racional por reducción al absurdo. Supongamos que $x = p/q$ con $q \geq 1$ y $p/q$ irreducible. Entonces

$$p^3 = 20q^3 - 10q^2p - 2qp^2 = q(20q^2 - 10qp - 2p^2).$$

Puesto que $q$ es divisor del segundo miembro, también lo es del primero $p^3$, lo que es absurdo si $p$ y $q$ son primos entre si y $q > 1$. Luego la ecuación no puede tener raíces racionales y $x$ es irracional.
Para la irracionalidad de $x^2$ basta ver que

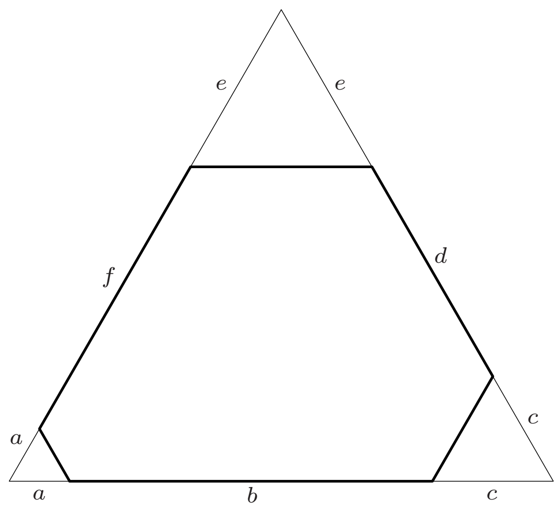
$$x\left(x^2 + 10\right) = 20 - 2x^2 \implies x = \frac{20 - 2x^2}{x^2 + 10},$$

y si $x^2$ fuese racional, también lo sería $x$ en contra de lo probado.

*Observación.*
La demostración de la irracionalidad de $x$ se basa en dos propiedades conocidas de los polinomios con coeficientes enteros:
1) Las únicas raíces enteras posibles son divisores del término independiente.
2) Las únicas raíces racionales posibles deben tener el numerador divisor del término independiente y el denominador divisor del coeficiente del monomio de grado máximo.

**OME 39. Problema 5. Solución**

La idea es prolongar los lados para formar un triángulo equilátero.




Tenemos $a+b+c+d+e+f=21$ y $\ell=a+b+c=c+d+e=e+f+a$ de donde sale $3\,\ell=21+a+c+e$, y por tanto,

$$\ell=7+\frac{a+c+e}{3}.$$

El valor más pequeño de $a+c+e$ es 6 y el más grande 15, así que

$$9\leq\ell\leq 12.$$

Si $a+c+e=6$, entonces son:

$$(a,c,e)=(1,2,3)\ \text{ y }\ \ (b,f,d)=(4,5,6).$$

Si $a+c+e=9$, el único caso posible es:

$$(a,c,e)=(1,3,5)\ \text{ y }\ \ (b,f,d)=(2,4,6).$$

Si $a+c+e=12$, el único caso posible es $(a,c,e)=(2,4,6)$.
Si $a+c+e=15$, el único posible es $(a,c,e)=(4,5,6)$.

Como el área del triángulo de lado $l$ es $l^2\dfrac{\sqrt{3}}{4}$ y la del hexágono es $\dfrac{\sqrt{3}}{4}\big(l^2-(a^2+c^2+e^2)\big)$, las áreas posibles son:

Si $a+c+e=6$, entonces $l=9$ y el área es $\dfrac{67\sqrt{3}}{4}$.

Si $a+c+e=9$, entonces $l=10$ y el área es $\dfrac{65\sqrt{3}}{4}$.

Si $a+c+e=4$, entonces $l=11$ y el área es $\dfrac{65\sqrt{3}}{4}$.

Si $a+c+e=5$, entonces $l=12$ y el área es $\dfrac{67\sqrt{3}}{4}$.

## OME 39. Problema 6. Solución

Tenemos la cadena con el total de $4n$ bolas, $2n$ blancas y $2n$ negras. Cogemos un grupo de un extremo con $2n$ bolas; este grupo tendrá $x$ bolas negras e $y$ bolas blancas, de forma que la diferencia es $x - y = 2k$ para $k \in \{-n, -n+1, \ldots, 1, 0, 1, \ldots, n-1, n\}$.
Vamos moviéndonos de una en una posición hacia el extremo contrario y en cada movimiento la diferencia varía en 2 o no varía, es decir $k$ aumenta en 1, disminuye en 1 o no cambia.
La diferencia varía en 2 si la bola que se deja y que se coge son de distinto color y se mantiene si son del mismo color.
La posición final, es decir en el otro extremo, tendrá las bolas al revés, $x$ bolas blancas e $y$ bolas negras con lo que la diferencia (blancas - negras) será ahora $y - x = -2k$, para el mismo $k$.
Es decir que $k$ pasa de una posición a su opuesta con el mismo valor absoluto. Como $k$ sólo puede variar de 1 en 1 tiene que pasar por el cero ya que no se lo puede saltar.
En el momento en que $k = 0$, se tiene $x = y = n$.
Por lo tanto siempre se podrá cortar un segmento de longitud $2n$ con $n$ bolas blancas y $n$ bolas negras.

## OME 40. Problema 1. Solución

Denotaremos por $a_i^j$ al elemento de la fila $i$-ésima y columna $j$-ésima del rectángulo.
Pongamos $n$ para el número de filas, $m$ para el de columnas y $S$ para la suma de los $n \times m$ elementos.
Con notación matricial queda

$$M = \begin{pmatrix} a_1^1 & a_1^2 & \cdots & a_1^m \\ a_2^1 & a_2^2 & \cdots & a_2^m \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_n^1 & a_n^2 & \cdots & a_n^m \end{pmatrix}.$$

Sumando por filas y llamando $S_k$ a la suma de la fila $k$, resulta

$$\begin{aligned} S_1 &= \frac{a_1^1 + a_1^m}{2}\, m \\ S_2 &= \frac{a_2^1 + a_2^m}{2}\, m \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ S_n &= \frac{a_n^1 + a_n^m}{2}\, m \end{aligned}$$

y sumando miembro a miembro queda:

$$\begin{aligned} S &= S_1 + S_2 + \cdots + S_n = \\ &= \frac{m}{2}\big((a_1^1 + a_2^1 + \cdots + a_n^1) + (a_1^m + a_2^m + \cdots + a_n^m)\big) = \\ &= \frac{n\,m}{4}\big(a_1^1 + a_n^1 + a_1^m + a_n^m\big). \end{aligned}$$

De aquí sale

$$a_1^1 + a_n^1 + a_1^m + a_n^m = \frac{4\,S}{n\,m} = \frac{4 \cdot 110721}{221} = 2004.$$

**OME 40. Problema 2. Solución**

*Primera solución*

Bastará probar que el área de cada cuadrilátero es la cuarta parte del área total.
La quebrada $APC$ divide al cuadrilátero en dos partes de igual área pues $AP$ es la mediana de $ABD$ y $PC$ lo es de $CBD$ (Figura 1).
La quebrada $TPZ$ divide al cuadrilátero $APCD$ (sombreado) en dos partes de igual área pues $PT$ es mediana de $APD$ y $PZ$ es mediana de $CPD$ (Figura 2).

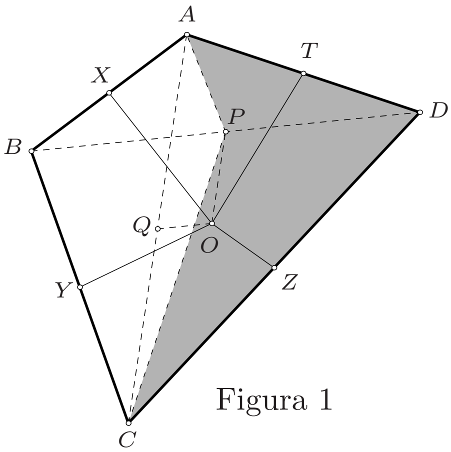


Figura 1

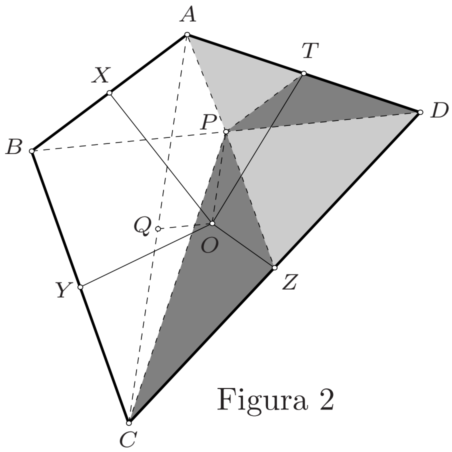


Figura 2

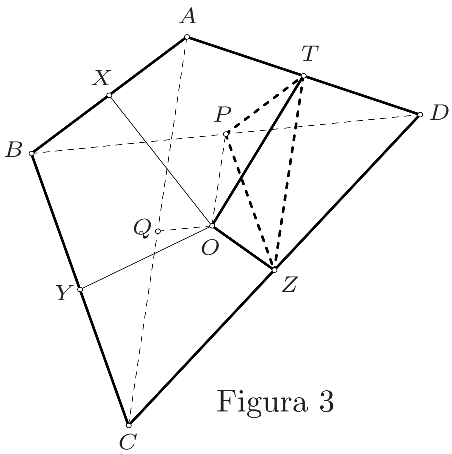


Figura 3

Tenemos ya probado que el área del cuadrilátero $TPZD$ es la cuarta parte del área del cuadrilátero inicial.
Finalmente $TZ$ es paralela a $OP$ por serlo ambas a $AC$; luego los triángulos $TPZ$ y $TOZ$ tienen la misma área y lo mismo les ocurre a los cuadriláteros $TPZD$ y $TOZD$ (Figura 3).
Del mismo modo se probaría para los otros tres cuadriláteros.

*Segunda solución*

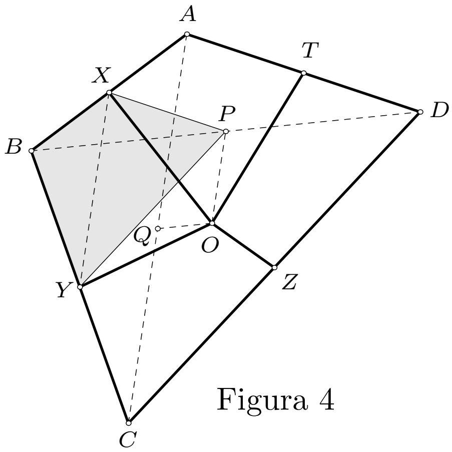



Figura 4

Al ser $OP$ paralela a $AC$, los triángulos $OXY$, $PXY$ tienen la misma base e igual altura y por tanto la misma área.

De ahí que los cuadriláteros $OXBY$, $PXBY$ también tienen la misma área, pero el área de $PXBY$ (en gris en la Figura 4) es la cuarta parte del cuadrilátero inicial al ser semejantes con razón 2 del grande al pequeño.

## OME 40. Problema 3. Solución

Primeramente observemos que $f\big(x+n\,f(y)\big)=f(x)-n\,y$.
Para $n=0$ es obvio, y por inducción, suponemos que para el entero $n\geq 1$ se cumple

$$f(x+(n-1)f(y))=f(x)-(n-1)\,y.$$

Entonces

$$\begin{aligned} f\big(x+n\,f(y)\big) &= f\big(x+(n-1)f(y)+f(y)\big) = \\ &= f\big(x+(n-1)f(y)\big)-y = \\ &= f(x)-(n-1)y-y=f(x)-n\,y. \end{aligned}$$

Análogamente se prueba la misma propiedad para cada entero $n\leq -1$.
Por tanto, haciendo $y=1$ y $n=f(1)$, sale

$$f\big(1+f(1)\,f(1)\big)=f(1)-n=0.$$

Poniendo $k=1+f(1)\,f(1)=1+\big(f(1)\big)^2>0$, se tiene $f(x)=f\big(x+f(k)\big)=f(x)-k$ que es una contradicción.
Deducimos que no existen funciones que satisfagan la condición requerida.

## OME 40. Problema 4. Solución

Supongamos que exista tal potencia de 2, es decir, que haya dos potencias de 2 cuyas expresiones decimales sólo difieran en el orden de colocación de los dígitos. Claramente ninguna de las dos potencias es divisible por 3 y ambas dejan el mismo resto cuando se dividen por 9. Esto último se debe a que el resto de un número al dividirse por 9 es congruente, módulo 9, con la suma de sus dígitos.
Por otra parte la mayor de ambas potencias se obtiene de la menor multiplicando ésta por 2, 4 u 8 (de otra manera no tendrían ambas el mismo número de dígitos). Sin embargo al multiplicar la menor potencia de las dos por 2, 4 u 8, cambia el resto obtenido al dividir por 9. Los restos de las sucesivas potencias de 2 al dividirse por 9 forman una sucesión periódica; los restos de

$$1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1024, 2048, 4096, \ldots$$

al dividir por 9 son

$$1, 2, 4, 8, 7, 5, \quad 1, 2, 4, 8, 7, 5, \quad 1, \ldots$$

Esta sucesión tiene periodo 6 porque para todo $n$ entero positivo

$$2^{n+6} - 2^n = 2^n(2^6 - 2^0) = 2^n \cdot 63,$$

y este número es divisible por 9 por lo que ambas potencias dejan el mismo resto. (La periodicidad también se deduce directamente de la observación de los restos, ya que cada uno de ellos depende sólo del anterior y a partir del primero que se repite, necesariamente resulta una sucesión periódica. Las congruencias de Fermat y Euler nos indican los posibles valores del periodo; en este caso hay que aplicar la de Euler).

No es posible por tanto, reordenar los dígitos de una potencia de 2 para obtener otra potencia distinta de 2.

## OME 40. Problema 5. Solución

*La condición es necesaria.*

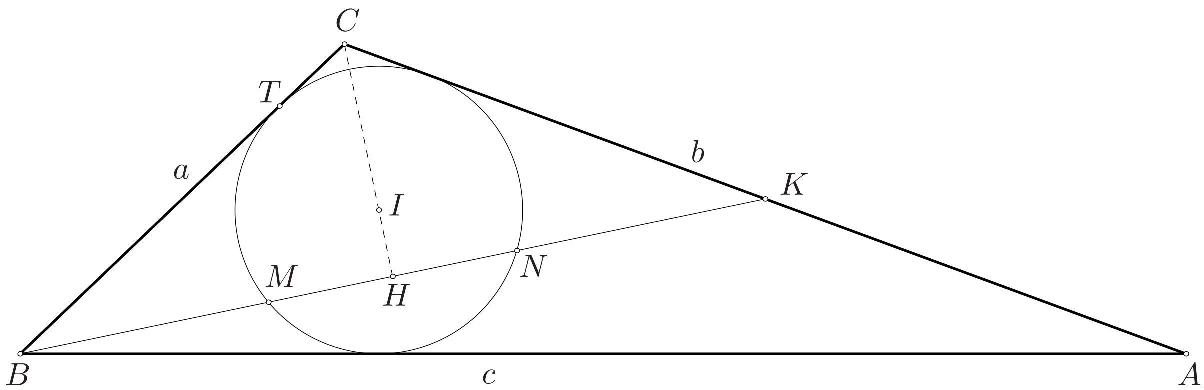
Sea $ABC$ un triángulo y $K$ el punto medio de $AC$. Supongamos que la mediana $BK$ corta a la circunferencia inscrita en dos puntos, $M$ y $N$, tales que

$$BM = MN = NK = x.$$

Sea $T$ el punto de tangencia del círculo inscrito con el lado $BC$.
En cualquier triángulo se cumplen las igualdades siguientes

$$BT = p - b = \frac{a+c-b}{2} \quad \text{con} \quad 2p = a+b+c$$
$$BK^2 = \frac{2a^2+2c^2-b^2}{4}$$

La primera se deduce sin más de $BT + CT = a$, $BT - CT = c - b$ y no es otra cosa que la fórmula que da las distancias de los vértices a los puntos de contacto del círculo inscrito; la segunda — fórmula de Apolonio o de la mediana — se puede obtener completando el triángulo $ABC$ hasta obtener un paralelogramo; o también aplicando el teorema del coseno a los triángulos $BCK$ y $ABK$ calculando $a^2$ y $c^2$.




Entonces resulta

$$2a^2 + 2c^2 - b^2 = 36x^2. \tag{1}$$

La potencia del vértice $B$ respecto del círculo inscrito se puede escribir de dos maneras

$$BT^2 = BM \cdot BN,$$

con lo cual

$$(a+c-b)^2 = 8\,x^2. \tag{2}$$

Como, evidentemente, en el triángulo del problema, los puntos $B$ y $K$ están igualmente alejados del centro del círculo inscrito, resulta $BC = KC$, de donde

$$b = 2a.$$

Sustituyendo esta última igualdad en (1) y (2), obtenemos

$$c^2 - a^2 = 18\,x^2, \qquad (c-a)^2 = 8\,x^2$$

y ya que $c - a \neq 0$, $x \neq 0$, resulta

$$\frac{c+a}{c-a} = \frac{9}{4}, \quad \text{de donde} \quad \frac{c}{a} = \frac{13}{5}.$$

Por lo tanto,

$$\frac{a}{5} = \frac{b}{10} = \frac{c}{13}.$$

*La condición es suficiente.*

No hay pérdida de la generalidad en suponer que $a = 5$, $b = 10$, $c = 13$.
Sustituyendo los valores de los lados en las fórmulas utilizadas en la primera parte, resulta

$$BK = 6\sqrt{2},\ BT^2 = 16 = BM \cdot BN$$

y para el radio de la circunferencia inscrita

$$r = \frac{S}{p} = \frac{6\sqrt{14}}{14}$$

donde $S$ se ha calcuado por medio de la fórmula de Herón.
El triángulo $BCK$ es isósceles, así que la bisectriz del ángulo $C$ es también altura. Sea $H = CI \cap BK$ y consideremos el triángulo rectángulo $BIT$; entonces $BI^2 = 4^2 + r^2 = \dfrac{2^2 \times 65}{14}$.
Por otra parte, en $BIH$, se tiene $HI^2 = \dfrac{4}{7}$, y finalmente en $IHM$, $HM^2 = r^2 - HI^2 = 2$.
Como $H$ es el punto medio de $MN$, resulta $MN = 2\sqrt{2}$, luego la mediana $BK$ queda, en efecto, dividida en tres partes iguales por el círculo inscrito.

E

**OME 40. Problema 6. Solución**

Numeremos las fichas desde 1 hasta 2004: la 1 es negra y las restantes son blancas.
Cada ficha inicialmente blanca debe ser *tocada* un número par de veces, para que al final del proceso siga teniendo la cara blanca hacia arriba. Cada movimiento posible cambia el número de fichas negras en un número impar:

**BNB** pasa a **NBN**: el número de fichas negras aumenta en 1

**NNB** pasa a **BBN**: el número de fichas negras disminuye en 1

**BNN** pasa a **NBB**: el número de fichas negras disminuye en 1

**NNN** pasa a **BBB**: el número de fichas negras disminuye en 3

Como inicialmente hay exactamente una ficha negra, el número total de movimientos para tener las 2004 fichas con la cara blanca hacia arriba debe se impar.
Designamos por $x_i$ el número de movimientos realizados eligiendo la ficha $i$ (que debe ser negra).
La ficha que ocupa el lugar $i$ cambia de color en los movimientos en que la elegimos a ella ($x_i$), a la de su izquierda ($x_{i-1}$) o a la de su derecha ($x_{i+1}$). Por lo tanto, $x_{i-1} + x_i + x_{i+1}$ es el número de veces que hemos dado la vuelta a la ficha que ocupa el lugar $i$. ($2004 + 1$ se identifica con 1, y $2003 + 2$ se identifica con 1).
El número total de movimientos será:

$$N = (x_1 + x_2 + x_3) + x_4 + \cdots + (x_{2002} + x_{2003} + x_{2004}) \,.$$

Como 2004 es múltiplo de 3, $N$ es la suma del número de veces que hemos dado la vuelta a las fichas en los lugares 2, 5 ... $3k + 2$, ... , 2003, todas ellas blancas al principio: así que $N$, suma de números pares, debería ser par: contradicción, pues $N$ es impar. Por lo tanto, no será posible conseguir que las 2004 fichas tengan la cara blanca hacia arriba.
Con 2003 fichas si es posible: iniciando el movimiento sobre la ficha 1, (única negra al principio), y repitiéndolo sobre las fichas que ocupan los lugares 2, ... , 2001, 2002 llegaríamos a la configuración

**NNN NNN ... NNN BB**

Eligiendo ahora las fichas que ocupan los lugares 2, 5, ... , $3k + 2$, ... , 2000, tendríamos

**BBB BBB ... BBB BB**

en la que todas las fichas tendrían la cara blanca hacia arriba.

# OLIMPIADAS INTERNACIONALES de MATEMÁTICAS

# 24 (1983)

## A

# 44 (2003)

6 de Julio de 1983

Primera sesión: 4 h 30 min

**24 IMO 1.** Hallar todas las funciones $f$ definida en el conjunto de los números reales, que toman valores reales positivos y que satisfacen las condiciones

1) $f\big(xf(y)\big) = yf(x)$ para todo $x, y$ positivos,

2) $f(x) \to 0$ si $x \to \infty$.

**24 IMO 2.** Sea $A$ uno de los dos puntos de intersección distintos de dos círculos distintos $C_1$, $C_2$ de centros $O_1$, $O_2$, respectivamente.
Una de las tangentes comunes a los dos círculos toca a $C_1$ en $P_1$ y a $C_2$ en $P_2$, mientras que la otra toca a $C_1$ en $Q_1$ y a $C_2$ en $Q_2$. Sea $M_1$ el punto medio de $P_1Q_1$ y $M_2$ el punto medio de $P_2Q_2$. Demostrar que $\widehat{O_1AO_2} = \widehat{M_1AM_2}$.

**24 IMO 3.** Sean $a, b, c$ enteros positivos, dos a dos primos entre si. Demostrar que $2abc-ab-bc-ca$ es el mayor entero que no puede expresarse en la forma $xbc+yca+zab$, donde $x$, $y$, y $z$ son enteros no negativos.

7 de Julio de 1983

Segunda sesión: 4 h 30 min

**24 IMO 4.** Sea $ABC$ un triángulo equilátero, y $\mathcal{E}$ el conjunto de todos los puntos contenidos en los tres segmentos $AB$, $BC$ y $CA$ (con $A$, $B$ y $C$ incluidos). Determinar si es cierto que para cada partición de $\mathcal{E}$ en dos conjuntos disjuntos, por lo menos uno de los dos conjuntos contiene los vértices de un triángulo rectángulo. Justificar la respuesta.

**24 IMO 5.** Decir si es posible elegir 1983 enteros positivos distintos, todos menores o iguales que $10^5$, de forma que tres cualesquiera de ellos no sean términos consecutivos de una progresión aritmética. Justificar la respuesta.

**24 IMO 6.** Sean $a$, $b$ y $c$ las longitudes de los lados de un triángulo. Demostrar que

$$a^2b(a-b)+b^2c(b-c)+c^2a(c-a)\geq 0.$$

Determinar en qué casos se cumple la igualdad.

4 de Julio de 1984

Primera sesión: 4 h 30 min

**25 IMO 1.** Demostrar que

$$0 \leq yz + zx + xy - 2xyz \leq \frac{7}{27},$$

donde $x$, $y$, $z$ son números reales no negativos que cumplen $x + y + z = 1$.

**25 IMO 2.** Hallar un par de enteros positivos $a$ y $b$ tales que

1) $ab(a+b)$ no es divisible por 7;

2) $(a+b)^7 - a^7 - b^7$ es divisible por $7^7$.

Justificar la respuesta.

**25 IMO 3.** Tenemos en el plano dos puntos diferentes, $A$ y $O$. Para cada punto $X$ del plano distinto de $O$, denotamos por $\alpha(X)$ la medida del ángulo entre $OA$ y $OX$, en radianes, y contado en sentido antihorario desde $OA$. ($0 \leq \alpha(X) < 2\pi$).

Sea $C(X)$ la circunferencia de centro $O$ y radio de longitud $OX + \dfrac{\alpha(X)}{OX}$.

Tenemos un número finito de colores y coloreamos cada uno de los puntos del plano con ellos.

Demostrar que existe un punto $Y$ tal que $\alpha(Y) > 0$ y tal que su color aparece sobre la circunferencia de $C(Y)$.

5 de Julio de 1984

Segunda sesión: 4 h 30 min

**25 IMO 4.** Sea $ABCD$ un cuadrilátero convexo tal que la recta $CD$ es tangente al círculo de diámetro $AB$. Demostrar que la recta $AB$ es tangente al círculo de diámetro $CD$ si y sólo si las rectas $BC$ y $AD$ son paralelas.

**25 IMO 5.** Sea $d$ la suma de las longitudes de todas las diagonales de un polígono convexo plano de $n$ vértices ($n > 3$), y sea $p$ su perímetro. Demostrar que

$$n - 3 < \frac{2d}{p} < \left[\frac{n}{2}\right]\left[\frac{n+1}{2}\right] - 2,$$

siendo $[x]$ la parte entera de $x$.

**25 IMO 6.** Sean $a$, $b$, $c$ y $d$ enteros impares tales que $0 < a < b < c < d$ y $ad = bc$. Demostrar que si $a + d = 2^k$ y $b + c = 2^m$ para ciertos enteros $k$ y $m$, entonces $a = 1$.

4 de Julio de 1985

Primera sesión: 4 h 30 min

**26 IMO 1.** Un círculo tiene el centro sobre el lado $AB$ del cuadrilátero inscriptible $ABCD$. Los otros tres lados son tangentes al círculo. Demostrar que $AD+BC=AB$.

**26 IMO 2.** Sean, $n$ y $k$ dos números naturales primos entre si, con $0<k<n$. Cada número del conjunto $\mathcal{M}=\{1,2,\ldots,n-1\}$ se colorea o bien en azul, o bien en blanco. Se sabe que

1) Para cada $i\in\mathcal{M}$, los elementos $i$ y $n-i$ tienen el mismo color.

2) Para cada $i\in\mathcal{M}$, $i\neq k$, los elementos $i$ y $|i-k|$ tienen el mismo color.

Demostrar que todos los elementos de $\mathcal{M}$ tienen el mismo color.

**26 IMO 3.** Dado un polinomio $P(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_kx^k$ con coeficientes enteros, denotamos por $w(P)$ el número de coeficientes impares de $P$. Sea $Q_i(x)=(1+x)^i$, para $i=0,1,\ldots$. Demostrar que si $i_1$, $i_2$, $\ldots$, $i_n$ son enteros tales que $0\le i_1<i_2<\cdots<i_n$, entonces

$$w\big(Q_{i_1}+Q_{i_2}+\cdots+Q_{i_n}\big)\ge w(Q_{i_1}).$$

5 de Julio de 1985

Segunda sesión: 4 h 30 min

**26 IMO 4.** Sea $\mathcal{M}$ un conjunto de 1985 enteros positivos distintos, ninguno de los cuales tiene divisores primos mayores que 26. Demostrar que $\mathcal{M}$ contiene como mínimo un subconjunto de cuatro elementos distintos, cuyo producto es la cuarta potencia de un entero.

**26 IMO 5.** Una circunferencia de centro $O$ pasa por los vértices $A$ y $C$ de un triángulo $ABC$ y corta otra vez los segmentos $AB$ y $BC$ en los puntos distintos $K$ y $N$, respectivamente. Las circunferencias circunscritas a los triángulos $ABC$ y $KBN$ se cortan exactamente en dos puntos distintos $B$ y $M$. Demostrar que el ángulo $\widehat{OMB}$ es un ángulo recto.

**26 IMO 6.** Para cada número real $x_1$, se construye la sucesión $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ haciendo

$$x_{n+1} = x_n\left(x_n + \frac{1}{n}\right) \quad \text{para cada} \quad n \geq 1.$$

Demostrar que existe exactamente un valor de $x_1$ para el cual $0 < x_n < x_{n+1} < 1$ para cada $n$.

9 de Julio de 1986

Primera sesión: 4 h 30 min

**27 IMO 1.** Sea $d$ un entero positivo distinto de 2, 5 y 13. Demostrar que se pueden encontrar elementos distintos $a$, $b$ en el conjunto $\{2, 5, 13, d\}$, de manera que $ab - 1$ no sea un cuadrado perfecto.

**27 IMO 2.** Tenemos en el plano un punto $P_0$ y un triángulo $A_1A_2A_3$. Definimos $A_s = A_{s-3}$ para todo $s \geq 4$. Construimos una sucesión de puntos $P_1$, $P_2$, $P_3$, ..., de forma que $P_{k+1}$ es la imagen de $P_k$ por la rotación de centro $A_{k+1}$ y ángulo 120° en sentido horario, para $k = 0, 1, 2\ldots$ Demostrar que si $P_{1986} = P_0$, entonces el triángulo $A_1A_2A_3$ es equilátero.

**27 IMO 3.** A cada vértice de un pentágono le asignamos un número entero, de forma que la suma de los cinco enteros sea positiva. Si tres vértices consecutivos tienen números asignados $x$, $y$, $z$, respectivamente, y es $y < 0$, entonces se permite hacer la siguiente operación: los números $x$, $y$, $z$ se sustituyen respectivamente por $x + y$, $-y$, $z + y$. Esta operación se puede hacer repetidamente mientras al menos uno de los cinco números sea negativo. Determinar si este proceso acaba *necesariamente* con un número finito de pasos.

10 de Julio de 1986

Segunda sesión: 4 h 30 min

**27 IMO 4.** Sean $A$, $B$ vértices adyacentes de un $n$-ágono regular ($n \geq 5$) del plano que tiene centro en $O$. Un triángulo $XYZ$ que es congruente con $OAB$ e inicialmente coincide con él, se mueve en el plano de forma que $Y$ y $Z$ describan la frontera del polígono, dejando $X$ en el interior. Hallar el lugar geométrico de $X$.

**27 IMO 5.** Hallar todas las funciones $f$ definidas en el conjunto de los números reales no negativos y que toman valores reales no negativos, tales que

1) $f\big(x\,f(y)\big)\,f(y) = f(x+y)$ para todo $x, y \geq 0$,

2) $f(2) = 0$,

3) $f(x) \neq 0$ para $0 \leq x < 2$.

**27 IMO 6.** Tenemos un conjunto finito de puntos del plano, cada uno con coordenadas enteras. Se pregunta si es posible colorear algunos puntos del conjunto en rojo y los restantes en blanco de forma que toda recta $L$ paralela a uno de los ejes de coordenadas contenga puntos rojos y blancos en cantidades cuya diferencia en valor absoluto sea 1 como máximo. Justificar la respuesta.

10 de Julio de 1987

Primera sesión: 4 h 30 min

**28 IMO 1.** Sea $p_n(k)$ el número de permutaciones del conjunto $\{1,2,\ldots,n\}$, $n \geq 1$, que tienen exactamente $k$ puntos fijos. Demostrar que

$$\sum_{k=0}^{n} k\ p_n(k) = n!.$$

(*Nota:* Una permutación $f$ de un conjunto $S$ es una aplicación biyectiva de $S$ sobre si mismo. Un elemento $i$ de $S$ se llama punto fijo de la permutación $f$ si $f(i) = i$.)

**28 IMO 2.** En un triángulo acutángulo $ABC$ la bisectriz interior del ángulo $A$ corta a $BC$ en $L$ y corta la circunferencia circunscrita de $ABC$ de nuevo en $N$. Trazamos perpendiculares desde $L$ a $AB$ y $AC$, con pies $K$ y $M$, respectivamente. Demostrar que el cuadrilátero $AKNM$ y el triángulo $ABC$ tienen la misma área.

**28 IMO 3.** Sean $x_1$, $x_2, \ldots$, $x_n$, números reales que cumplen $x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2 = 1$. Demostrar que para cada entero $k \geq 2$ existen enteros no todos nulos $a_1$, $a_2$, $\ldots$, $a_n$, tales que $|a_i| \leq k-1$ para todo $i$ y

$$|a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n| \leq \frac{(k-1)\sqrt{n}}{k^n - 1}.$$

11 de Julio de 1987

Segunda sesión: 4 h 30 min

**28 IMO 4.** Demostrar que no existe ninguna función del conjunto de enteros no negativos en él mismo tal que, para todo $n$, $f\big(f(n)\big) = n + 1987$.

**28 IMO 5.** Sea $n$ un entero mayor o igual que 3. Demostrar que existe un conjunto de $n$ puntos del plano tal que la distancia entre dos puntos cualesquiera del conjunto es irracional, y tal que cada subconjunto de tres puntos determina un triángulo no degenerado de área racional.

**28 IMO 6.** Sea $n$ un entero mayor o igual que 2. Demostrar que si $k^2 + k + n$ es primo para todos los enteros $k$ tales que $0 \leq k \leq \sqrt{n/3}$, entonces $k^2 + k + n$ es primo para todos los enteros $k$ tales que $0 \leq k \leq n - 2$.

15 de Julio de 1988

Primera sesión: 4 h 30 min

**29 IMO 1.** Consideremos dos círculos coplanarios de radios $R$ y $r$ $(R > r)$ con mismo centro. Sea $P$ un punto fijo del círculo menor y $B$ un punto variable sobre el círculo mayor. La recta $BP$ corta al círculo mayor de nuevo en $C$. La perpendicular $l$ a $BP$ por $P$ corta al círculo menor otra vez en $A$. (Si $l$ es tangente al círculo en $P$, entonces $A = P$).

1) Determinar el conjunto de valores tomados por $BC^2 + CA^2 + AB^2$.

2) Hallar el lugar geométrico del punto medio de $AB$.

**29 IMO 2.** Sea $n$ un entero positivo y sean $A_1$, $A_2$, ..., $A_{2n+1}$ subconjuntos de un conjunto $B$. Supongamos que

a) Cada $A_i$ tiene exactamente $2n$ elementos.

b) Cada $A_i \cap A_j$, $(1 \leq i < j \leq 2n+1)$ contiene exactamente un elemento.

c) Cada elemento de $B$ pertenece como mínimo a dos de los $A_i$.

Determinar los valores de $n$ para los cuales se puede asignar a cada elemento de $B$ un valor 0 o 1, de tal manera que cada $A_i$ tenga el 0 asignado a exactamente $n$ de sus elementos.

**29 IMO 3.** Una función $f$ se define sobre los enteros positivos por

$$f(1) = 1, \qquad f(3) = 3,$$
$$f(2n) = f(n),$$
$$f(4n+1) = 2f(2n+1) - f(n),$$
$$f(4n+3) = 3f(2n+1) - 2f(n),$$

para todo entero positivo $n$. Determinar el número de enteros positivos $n$, menores o iguales que 1988, para los cuales $f(n) = n$.

16 de Julio de 1988

Segunda sesión: 4 h 30 min

**29 IMO 4.** Demostrar que el conjunto de números reales $x$ que satisfacen la desigualdad

$$\sum_{k=1}^{70} \frac{k}{x-k} \geq \frac{5}{4}$$

es la unión de intervalos disjuntos cuyas longitudes suman 1988.

**29 IMO 5.** Sea $ABC$ un triángulo rectángulo en $A$, y $D$ el pie de la altura desde $A$. La recta que une los incentros de los triángulos $ABD$ y $ACD$, interseca los lados $AB$ y $AC$ en los puntos $K$ y $L$, respectivamente. Si $S$ y $T$ denotan las áreas de los triángulos $ABC$ y $AKL$, respectivamente, demostrar que $S \geq 2T$.

**29 IMO 6.** Sean $a$ y $b$ enteros positivos tales que $ab+1$ divide a $a^2+b^2$. Demostrar que $\dfrac{a^2+b^2}{ab+1}$ es el cuadrado de un entero.

18 de Julio de 1989

Primera sesión: 4 h 30 min

**30 IMO 1.** Demostrar que el conjunto $\{1, 2, \ldots, 1989\}$ puede expresarse como unión disjunta de subconjuntos $A_i$ $(i = 1, 2, \ldots, 117)$ tales que

1) Cada $A_i$ contiene 17 elementos,

2) La suma de todos los elementos de de cada $A_i$ es la misma.

**30 IMO 2.** En un triángulo acutángulo $ABC$, la bisectriz interior del ángulo $A$ corta a la circunferencia circunscrita de nuevo en $A_1$. Los puntos $B_1$ y $C_1$ se definen análogamente. Sea $A_0$ el punto de intersección dela recta $AA_1$ con las bisectrices exteriores de los ángulos $B$ y $C$. Los puntos $B_0$ y $C_0$ se definen análogamente. Demostrar que

1) El área del triángulo $A_0B_0C_0$ es el doble del área del hexágono $AC_1BA_1CB_1$.

2) El área del triángulo $A_0B_0C_0$ es mayor o igual que 4 veces el área de $ABC$.

**30 IMO 3.** Sean $n$ y $k$ enteros positivos, y $\mathcal{S}$ un conjunto de $n$ puntos del plano tales que

1) Tres puntos cualesquiera de $\mathcal{S}$ no están alineados.

2) Para cada punto $P$ de $\mathcal{S}$ hay al menos $k$ puntos de $\mathcal{S}$ que equidistan de $P$.

Demostrar que $k < \frac{1}{2} + \sqrt{2n}$.

19 de Julio de 1989

Segunda sesión: 4 h 30 min

**30 IMO 4.** Sea $ABCD$ un cuadrilátero convexo tal que los lados $AB$, $AD$ y $BC$ satisfacen $AB = AD + BC$. Existe un punto $P$ dentro del cuadrilátero a la distancia $h$ de la recta $CD$ tal que $AP = AD + h$ y $BP = BC + h$. Demostrar que

$$\frac{1}{\sqrt{h}} \geq \frac{1}{\sqrt{AD}} + \frac{1}{\sqrt{BC}}.$$

**30 IMO 5.** Demostrar que para cada entero positivo $n$ existen $n$ enteros positivos consecutivos, ninguno de los cuales es una potencia entera de un número primo.

**30 IMO 6.** Una permutación $(x_1, x_2, \ldots, x_{2n})$ del conjunto $\{1, 2, \ldots, 2n\}$, donde $n$ es un entero positivo, se dice que tiene la propiedad $P$ si

$$|x_i - x_{i+1}| = n$$

para al menos un $i$ en $\{1, 2, \ldots, 2n-1\}$. Demostrar que, para cada $n$, hay más permutaciones con la propiedad $P$ que sin ella.

12 de Julio de 1990

Primera sesión: 4 h 30 min

**31 IMO 1.** Las cuerdas $AB$ y $CD$ de una circunferencia se cortan en el punto $E$ dentro del círculo. Sea $M$ un punto interior del segmento $EB$. La recta tangente en $E$ a la circunferencia que pasa por $D$, $E$ y $M$ corta las rectas $BC$ y $AC$ en $F$ y $G$, respectivamente. Si $\dfrac{AM}{AB} = t$, hallar $\dfrac{EG}{EF}$ en función de $t$.

**31 IMO 2.** Sea $n \geq 3$ y consideremos un conjunto $\mathcal{E}$ de $2n-1$ puntos distintos sobre una circunferencia. Supongamos que exactamente $k$ de estos puntos se colorean de negro. Tal coloración es "buena" si existe al menos un par de puntos negros de forma que el interior de al menos uno de los arcos entre ellos contiene exactamente $n$ puntos de $E$. Hallar el mínimo valor de $k$ para que cualquier coloración de este tipo de $k$ puntos sea buena.

**31 IMO 3.** Determinar todos los enteros $n > 1$ tales que $\dfrac{2^n+1}{n^2}$ sea un entero.

13 de Julio de 1990

Segunda sesión: 4 h 30 min

**31 IMO 4.** Sea $\mathbb{Q}^+$ el conjunto de los números racionales positivos. Construir una función $f : \mathbb{Q}^+ \to \mathbb{Q}^+$ tal que, para todo $x, y$ en $\mathbb{Q}^+$, cumpla

$$f\big(xf(y)\big) = \frac{f(x)}{y}.$$

**31 IMO 5.** Dado un entero inicial $n_0 > 1$, dos jugadores, $A$ y $B$, eligen enteros $n_1$, $n_2$, $n_3$, ... , alternativamente, según las reglas siguientes:

1) Conociendo $n_{2k}$, $A$ elige cualquier entero $n_{2k+1}$ tal que $n_{2k} \le n_{2k+1} \le n_{2k}^2$.

2) Conociendo $n_{2k+1}$, $B$ elige cualquier entero $n_{2k+2}$ tal que $\dfrac{n_{2k+1}}{n_{2k+2}}$ sea un primo elevado a una potencia entera positiva.

El jugador $A$ gana el juego eligiendo el número 1990; el jugador $B$ gana eligiendo el número 1.

Determinar el valor inicial $n_0$ que permita que:

a) $A$ tiene una estrategia ganadora.

b) $B$ tiene una estrategia ganadora.

c) Ningún jugador tiene estrategia ganadora.

**31 IMO 6.** Demostrar que existe un polígono convexo de 1990 lados con las dos siguientes propiedades:

a) Todos los ángulos son iguales.

b) Las longitudes de los lados son los números $1^2$, $2^2$, $3^2$, ... , $1990^2$ en un cierto orden.

17 de Julio de 1991

Primera sesión: 4 h 30 min

**32 IMO 1.** Dado un triángulo $ABC$, sea $I$ el centro del círculo inscrito. Las bisectrices internas de los ángulo $A$, $B$, $C$ cortan a los lados opuestos en $A'$, $B'$, $C'$, respectivamente. Demostrar que

$$\frac{1}{4} < \frac{AI \cdot BI \cdot CI}{AA' \cdot BB' \cdot CC'} \leq \frac{8}{27}.$$

**32 IMO 2.** Sea $n > 6$ un entero y $a_1$, $a_2$, ..., $a_k$ números naturales menores o iguales que $n$ y primos con $n$. Si

$$a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = \cdots = a_k - a_{k-1} > 0,$$

demostrar que $n$ tiene que ser primo o bien una potencia de 2.

**32 IMO 3.** Sea $\mathcal{S} = \{1, 2, 3, \ldots, 280\}$. Hallar el menor entero $n$ tal que cada subconjunto de $\mathcal{S}$ de $n$ elementos contiene cinco números que son dos a dos primos entre si.

18 de Julio de 1991

Segunda sesión: 4 h 30 min

**32 IMO 4.** Sea $G$ un grafo conexo de $k$ aristas. Demostrar que es posible etiquetar las aristas $1$, $2$, $\dots$, $k$ de tal manera que en cada vértice en que concurran dos o más aristas, el máximo común divisor de los valores de las etiquetas de dichas aristas sea 1.

[Un *grafo* consiste en un conjunto de puntos, llamados *vértices*, junto con un conjunto de *aristas* que unen ciertos pares de vértices distintos. Cada par de vértices $u$, $v$ pertenece a lo sumo a una arista. El grafo $G$ es *conexo* si para cada par de vértices distintos $x$, $y$, existe una sucesión de vértices $x = v_0$, $v_1$, $v_2$, $\dots$, $v_m = y$ tal que cada par $v_i v_{i+1}$ $(0 \leq i < m)$ está unido por una arista de $G$. ]

**32 IMO 5.** Sea $ABC$ un triángulo y $P$ un punto interior de $ABC$. Demostrar que al menos uno de los ángulos $\widehat{PAB}$, $\widehat{PBC}$, $\widehat{PCA}$ es menor o igual que $30°$.

**32 IMO 6.** Una sucesión infinita $x_0$, $x_1$, $x_2$, $\dots$ de números reales se llama *acotada* si existe una constante $C$ tal que $|x_i| \leq C$ para todo $i \geq 0$. Dado un número real $a > 1$, construir una sucesión infinita acotada $x_0$, $x_1$, $x_2$, $\dots$ tal que

$$|x_i - x_j|\,|i - j|^a \geq 1$$

para todo par de enteros no negativos distintos $i, j$.

15 de Julio de 1992

Primera sesión: 4 h 30 min

**33 IMO 1.** Hallar todos los enteros $a$, $b$, $c$, con $1 < a < b < c$ tales que

$$(a-1)(b-1)(c-1)$$

es un divisor de $abc-1$.

**33 IMO 2.** Sea $\mathbb{R}$ el conjunto de los números reales. Hallar una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que

$$f\big(x^2 + f(y)\big) = y + \big(f(x)\big)^2 \quad \text{para todo} \quad x, y \in \mathbb{R}.$$

**33 IMO 3.** Consideremos nueve puntos en el espacio, de forma que cuatro cualesquiera de ellos no sean coplanarios. Cada par de puntos se une con una arista (es decir, un segmento) y cada arista o bien se colorea de color azul, o bien se colorea de color rojo, o bien se deja sin colorear. Hallar el mínimo valor de $n$ de forma que cuando se colorean exactamente $n$ aristas, en este conjunto de aristas coloreadas hay necesariamente un triángulo con las aristas del mismo color.

16 de Julio de 1992

Segunda sesión: 4 h 30 min

**33 IMO 4.** Sea $C$ un círculo del plano, $L$ una recta tangente al círculo $C$, y $M$ un punto de $L$. Hallar el lugar geométrico de los puntos $P$ con la propiedad siguiente: existen dos puntos $Q$, $R$ sobre $L$ tal que $M$ es el punto medio de $QR$ y $C$ es la circunferencia inscrita del triángulo $PQR$.

**33 IMO 5.** Sea $S$ un conjunto finito de puntos del espacio tridimensional. Sean $S_x$, $S_y$, $S_z$ conjuntos formados por las proyecciones ortogonales de los puntos de $S$ sobre el plano $yz$, sobre el plano $zx$ y sobre el plano $xy$, respectivamente. Demostrar que

$$|S|^2 \leq |S_x|\,|S_y|\,|S_z|,$$

siendo $|A|$ el número de elementos del conjunto finito $A$. (Nota: La proyección ortogonal de un punto sobre un plano es el pie de la perpendicular trazada desde el punto hasta el plano.)

**33 IMO 6.** Para cada entero positivo $n$, sea $S(n)$ el máximo entero tal que, para cada entero positivo $k \leq S(n)$, $n^2$ puede escribirse como suma de $k$ cuadrados positivos.

1) Demostrar que $S(n) \leq n^2 - 14$ para cada $n \geq 4$.

2) Hallar un entero $n$ tal que $S(n) = n^2 - 14$.

3) Demostrar que existen infinitos enteros $n$ tales que $S(n) = n^2 - 14$.

18 de Julio de 1993

Primera sesión: 4 h 30 min

**34 IMO 1.** Sea $f(x) = x^n + 5x^{n-1} + 3$ con $n > 1$ entero. Demostrar que $f(x)$ no puede expresarse como producto de dos polinomios con coeficientes enteros y de grado mayor o igual que 1.

**34 IMO 2.** Sea $D$ un punto interior de un triángulo acutángulo $ABC$ tal que $\widehat{ADB} = \widehat{ACB} + 90°$ y $AC \cdot BD = AD \cdot BC$.

1) Calcular el valor de la razón $\dfrac{AB \cdot CD}{AC \cdot BD}$.

2) Demostrar que las tangentes por $C$ a las circunferencias circunscritas a los triángulos $ACD$ y $BCD$ son perpendiculares.

**34 IMO 3.** En un tablero infinito se juega el juego que se describe a continuación. Al principio, se colocan $n^2$ fichas en el tablero, formando un bloque $n \times n$ de casillas adyacentes, con una ficha en cada casilla. Un movimiento del juego es un salto en dirección horizontal o vertical sobre una casilla adyacente ocupada y que va a una casilla desocupada inmediata adyacente. La ficha sobre la que se ha saltado se retira del tablero. Hallar los valores de $n$ para los cuales el juego puede terminar con una sola ficha en el tablero.

19 de Julio de 1993

Segunda sesión: 4 h 30 min

**34 IMO 4.** Dados tres puntos del plano $P$, $Q$, $R$, definimos $m(PQR)$ como el mínimo de las longitudes de las alturas del triángulo $PQR$ (donde $m(PQR) = 0$ si $P$, $Q$, $R$ están alineados.) Sean $A$, $B$, $C$ puntos dados del plano. Demostrar que, para todo punto $X$ del plano se cumple

$$m(ABC) \leq m(ABX) + m(AXC) + m(XBC).$$

**34 IMO 5.** Sea $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$. Determinar si existe o no una función $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tal que $f(1) = 2$, $f\big(f(n)\big) = f(n) + n$ y $f(n) < (f(n+1)$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

**34 IMO 6.** Sea $n > 1$ un entero. Tenemos $n$ lámparas $L_0$, $L_1$, ..., $L_{n-1}$ situadas alrededor de un círculo. Cada lámpara puede estar encendida (`ON`) o apagada (`OFF`). Realizamos una sucesión de acciones $S_0$, $S_1$, $S_2$, ... sobre las lámparas. La acción $S_j$ afecta solamente el estado de la lámpara $L_j$ (dejando el estado de las demás inalteradas) de la forma siguiente: si $L_{j-1}$ está en estado `ON`, $S_j$ cambia el estado de $L_j$ de `ON` a `OFF` o de `OFF` a `ON`; si $L_{j-1}$ está en `OFF`, $S_j$ deja inalterado el estado de $L_j$. Las lámparas están etiquetadas módulo $n$, es decir, $L_{-1} = L_{n-1}$, $L_0 = L_n$, $L_1 = L_{n+1}$, y así sucesivamente. Inicialmente todas las lámparas están en `ON`. Demostrar que

1) Existe un entero positivo $M(n)$ tal que después de $M(n)$ acciones, todas las lámparas vuelven a estar `ON`.

2) Si $n$ es de la forma $2^k$, entonces todas las lámparas están `ON` después de $n^2 - 1$ acciones.

3) Si $n$ es de la forma $2^k+1$, entonces todas las lámparas están `ON` después de $n^2-n+1$ acciones.

13 de Julio de 1994

Primera sesión: 4 h 30 min

**35 IMO 1.** Sean $M$ y $N$ enteros positivos. Sean $a_1$, $a_2$, ..., $a_m$ elementos distintos de $\{1, 2, \ldots n\}$ tales que cuando $a_i + a_j \leq n$ para algún $i, j$, $1 \leq i \leq j \leq m$, entonces existe $k$, $1 \leq k \leq m$, con $a_i + a_j = a_k$. Demostrar que

$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_m}{m} \geq \frac{n+1}{2}.$$

**35 IMO 2.** Sea $ABC$ un triángulo isósceles con $AB = AC$. Supongamos que

1) $M$ es el punto medio de $BC$ y $O$ es el punto de la recta $AM$ tal que $OB$ es perpendicular a $AB$.

2) $Q$ es un punto arbitrario en el segmento $BC$ distinto de $B$ y de $C$.

3) $E$ está sobre la recta $AB$ y $F$ está sobre la recta $AC$ de manera que $E$, $Q$ y $F$ son distintos y están alineados.

Demostrar que $OQ$ es perpendicular a $EF$ si y sólo si $QE = QF$.

**35 IMO 3.** Para cualquier positivo $k$, sea $f(k)$ el número de elementos del conjunto $\{k+1, k+2, \ldots, 2k\}$ cuya representación en base 2 tiene exactamente tres unos.

1) Demostrar que, para cada entero positivo $m$, existe al menos un entero positivo $k$ tal que $f(k) = m$.

2) Determinar todos los enteros positivos $m$ para los cuales existe exactamente un $k$ con $f(k) = m$.

14 de Julio de 1994

Segunda sesión: 4 h 30 min

**35 IMO 4.** Determinar todos los pares ordenados $(m, n)$ de enteros positivos tales que

$$\frac{n^3+1}{mn-1}$$

es un entero.

**35 IMO 5.** Sea $\mathcal{S}$ el conjunto de los números reales estrictamente mayores que $-1$. Hallar todas las funciones $f : \mathcal{S} \to \mathcal{S}$ que satisface las dos condiciones:

1) $f\big(x + f(y) + x\,f(y)\big) = y + f(x) + y\,f(x)$ para todo $x, y \in \mathcal{S}$.

2) $\dfrac{f(x)}{x}$ es estrictamente creciente en cada uno de los intervalos $-1 < x < 0$ y $0 < x$.

**35 IMO 6.** Demostrar que existe un conjunto $A$ de enteros positivos con la propiedad siguiente: Para todo conjunto infinito $S$ de primos, existen dos enteros positivos $m \in A$ y $n \notin A$, cada uno de los cuales es un producto de $k$ elementos distintos de $S$, para algún $k \geq 2$.

19 de Julio de 1995
Primera sesión: 4 h 30 min

**36 IMO 1.** Sean $A$, $B$, $C$, $D$ cuatro puntos distintos sobre una recta, en este orden. Las circunferencias de diámetros $AC$ y $BD$ se cortan en $X$ e $Y$. La recta $XY$ corta a $BC$ en $Z$. Sea $P$ un punto sobre la recta $XY$, distinto de $Z$. La recta $CP$ corta la circunferencia de diámetro $AC$ en $C$ y $M$, y la recta $BP$ corta la circunferencia de diámetro $BD$ en $B$ y $N$. Demostrar que las rectas $AM$, $DN$ y $XY$ son concurrentes.

**36 IMO 2.** Sean $a$, $b$, $c$ números reales positivos tales que $abc = 1$. Demostrar que

$$\frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{1}{b^3(c+a)} + \frac{1}{c^3(a+b)} \geq \frac{3}{2}.$$

**36 IMO 3.** Determinar todos los enteros $n > 3$ para los cuales existen $n$ puntos $A_1$, $A_2$, ..., $A_n$, no alineados tres a tres, y números reales $r_1$, $r_2$, ..., $r_n$, tales que para $1 \leq i < j < k \leq n$, el área del triángulo $A_iA_jA_k$ es $r_i + r_j + r_k$.

20 de Julio de 1995

Segunda sesión: 4 h 30 min

**36 IMO 4.** Hallar el máximo valor de $x_0$ para el cual existe una sucesión finita $x_0$, $x_1, \dots, x_{1995}$ de números reales, con $x_0 = x_{1995}$, y tal que, para $i = 1, 2, \dots, 1995$ se cumple

$$x_{i-1} + \frac{2}{x_{i-1}} = 2x_i + \frac{1}{x_i}.$$

**36 IMO 5.** Sea $ABCDEF$ un hexágono convexo con $AB = BC = CD$ y $DE = EF = FA$, tal que $\widehat{BCD} = \widehat{EFA} = \pi/3$. Supongamos que $G$ y $H$ son puntos en el interior del hexágono tales que $\widehat{AGB} = \widehat{DHE} = 2\pi/3$. Demostrar que $AG + GB + GH + DH + HE \geq CF$.

**36 IMO 6.** Sea $p$ un número primo impar. Hallar el número de subconjuntos $A$ del conjunto $\{1, 2, \dots, 2p\}$ tales que

1) $A$ tiene exactamente $p$ elementos.

2) La suma de todos los elementos de $A$ es divisible por $p$.

10 de Julio de 1996
Primera sesión: 4 h 30 min

**37 IMO 1.** Nos dan un entero positivo $r$ y un tablero rectangular $ABCD$ de dimensiones $|AB| = 20$, $|BC| = 12$. El rectángulo está dividido en $20 \times 12$ casillas cuadradas de lado unidad. Se permiten movimientos de una casilla a otra sólo si la distancia entre los centros de los dos cuadrados es $\sqrt{r}$. Se trata de determinar una sucesión de movimientos que nos lleven del cuadrado que tiene a $A$ como vértice al cuadrado que tiene a $B$ como vértice.

1) Demostrar que no es posible hacerlo si $r$ es divisible por 2 o por 3.

2) Demostrar que es posible si $r = 73$.

3) ¿Hay solución si $r = 97$?

**37 IMO 2.** Sea $P$ un punto dentro de un triángulo $ABC$ tal que

$$\widehat{APB} - \widehat{ACB} = \widehat{APC} - \widehat{ABC}.$$

Sean $D$ y $E$ los incentros de los triángulos $APB$ y $APC$, respectivamente. Demostrar que $AP$, $BD$ y $CE$ se cortan en un punto.

**37 IMO 3.** Sea $S$ el conjunto de los enteros no negativos. Hallar todas las funciones $f$ definidas en $S$ y que toman valores en $S$ tales que

$$f\big(m + f(n)\big) = f\big(f(m)\big) + f(n), \quad \forall m, n \in S.$$

11 de Julio de 1996

Segunda sesión: 4 h 30 min

**37 IMO 4.** Los enteros positivos $A$ y $B$ son tales que los números $15a + 16b$ y $16a - 15b$ son ambos cuadrados de enteros positivos. ¿Cual es el menor valor que puede tomar el menor de dichos cuadrados?

**37 IMO 5.** Sea $ABCDEF$ un hexágono convexo tal que $AB$ es paralelo a $DE$, $BC$ es paralelo a $EF$ y $CD$ es paralelo a $FA$. Sean $R_A$, $R_C$, $R_E$ los radios de las circunferencias circunscritas a los triángulos $FAB$, $BCD$, $DEF$, respectivamente. Sea $p$ el perímetro del hexágono. Demostrar que

$$R_A + R_C + R_E \geq \frac{p}{2}.$$

**37 IMO 6.** Sean $p$, $q$, $n$ enteros positivos con $p + q < n$. Sea $(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ una $(n+1)$-pla de enteros que satisfacen las condiciones siguentes

1) $x_0 = x_n = 0$.

2) Para cada $i$ con $1 \leq i \leq n$, o bien $x_i - x_{i-1} = p$, o bien $x_i - x_{i-1} = -q$.

Demostrar que existen índices $i < j$ con $(i, j) \neq (0, n)$ tales que $x_i = x_j$.

24 de Julio de 1997

Primera sesión: 4 h 30 min

**38 IMO 1.** Los puntos de coordenadas enteras del plano son los vértices de cuadrados unidad. Los cuadrados se colorean alternativamente blancos y negros, como en un tablero de ajedrez. Para todo par de enteros positivos $m$ y $n$, consideremos un triángulo rectángulo cuyos vértices tienen coordenadas enteras y cuyos catetos, de longitudes $m$ y $n$ están sobre lados de los cuadrados. Sea $S_1$ el área total de la parte negra del triángulo y $S_2$ el área total de la parte blanca. Sea

$$f(m,n) = |S_1 - S_2|.$$

1) Calcular $f(m,n)$ para todos los enteros positivos $m$ y $n$ que son a la vez pares o impares.

2) Demostrar que $f(m,n) \le \frac{1}{2}\max\{m,n\}$, para todo $m, n$.

3) Demostrar que no existe una constante $C$ tal que $f(m,n) < C$ para todo $m, n$.

**38 IMO 2.** El ángulo $A$ es el menor del triángulo $ABC$. Los puntos $B$ y $C$ dividen la circunferencia circunscrita del triángulo en dos arcos. Sea $U$ un punto interior del arco entre $B$ y $C$ que no contiene a $A$. Las mediatrices de $AB$ y $AC$ cortan a la recta $AU$ en $V$ y $W$, respectivamente. Las rectas $BV$ y $CW$ se cortan en $T$. Demostrar que

$$AU = TB + TC.$$

**38 IMO 3.** Sean $x_1$, $x_2$, ... , $x_n$ números reales que cumplen las condiciones

$$|x_1 + x_2 + \cdots + x_n| = 1 \quad \text{y} \quad |x_i| \le \frac{n+1}{2} \quad \text{para} \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Demostrar que existe una permutación $y_1$, $y_2$, ... , $y_n$ de $x_1$, $x_2$, ... , $x_n$ tal que

$$|y_1 + 2y_2 + \cdots + ny_n| \le \frac{n+1}{2}.$$

25 de Julio de 1997

Segunda sesión: 4 h 30 min

**38 IMO 4.** Una matriz $n \times n$ cuyos elementos toman valores en el conjunto $\mathcal{S} = \{1, 2, \ldots, 2n-1\}$ se llama matriz *plateada* si, para cada $i = 1, 2, \ldots, n$, la $i$-ésima fila y la $i$-ésima columna contienen, entre las dos, todos los elementos de $\mathcal{S}$. Demostrar que:

1) No exiten matrices plateadas para $n = 1997$.

2) Existen matrices plateadas para infinitos valores de $n$.

**38 IMO 5.** Hallar tods los pares $(a, b)$ de enteros positivos que satisfacen la ecuación

$$a^{b^2} = b^a.$$

**38 IMO 6.** Para cada entero psoitivo $n$, sea $f(n)$ el número de maneras de representar $n$ como suma de potencias de 2 con exponentes enteros no negativos. Las representaciones que difieren solamente en el orden de los sumandos se consideran la misma. Por ejemplo, $f(4) = 4$, ya que el número 4 puede representarse de las cuatro formas siguientes: $4$; $2+2$; $2+1+1$; $1+1+1+1$. Demostrar que para cada entero $n \geq 3$,

$$2^{n^2/4} < f(2^n) < 2^{n^2/2}.$$

15 de Julio de 1998
Primera sesión: 4 h 30 min

**39 IMO 1.** En el cuadrilátero convexo $ABCD$, las diagonales $AC$ y $BD$ son perpendiculares y los lados opuestos $AB$ y $DC$ no son paralelos. Supongamos que el punto $P$ de intersección de las mediatrices de $AB$ y $DC$, está dentro de $ABCD$. Demostrar que $ABCD$ es un cuadrilátero inscriptible si y sólo si los dos triángulos $ABP$ y $CDP$ tienen la misma área.

**39 IMO 2.** En una competición hay $a$ participantes y $b$ jueces, donde $b \geq 3$ es un entero impar. Cada juez califica cada competidor como *apto* o *no apto*. Supongamos que $k$ es un número tal que, para cada par de jueces, sus calificaciones coinciden en a lo sumo $k$ participantes. Demostrar que

$$\frac{k}{a} \geq \frac{b-1}{2b}.$$

**39 IMO 3.** Designemos con $d(n)$ el número de divisores positivos del entero positivo $n$ (con 1 y $n$ incluidos). Determinar todos los enteros positivos $k$ tales que

$$\frac{d(n^2)}{d(n)} = k$$

para algún $n$.

16 de Julio de 1998

Segunda sesión: 4 h 30 min

**39 IMO 4.** Determinar todos los pares $(a, b)$ de enteros positivos tales que $ab^2+b+7$ divide a $a^2b + a + b$.

**39 IMO 5.** Sea $I$ el incentro del triángulo $ABC$. Sean $K$, $L$, $M$ los puntos de contacto de la circunferencia inscrita a $ABC$ con los lados $BC$, $CA$, $AB$, respectivamente. Demostrar que el ángulo $\widehat{RIS}$ es agudo.

**39 IMO 6.** Consideremos todas las funciones $f$ del conjunto $\mathbb{N}$ de los enteros positivos en él mismo que satisfacen $f\big(t^2 f(s)\big) = s\,\big(f(t)\big)^2$, para todo $s$ y $t$ en $\mathbb{N}$. Determinar el mínimo valor posible de $f(1998)$.

16 de Julio de 1999

Primera sesión: 4 h 30 min

**40 IMO 1.** Hallar todos los conjuntos finitos $\mathcal{S}$ de al menos tres puntos del plano tales que, para todo par de puntos distintos $A$, $B$ de $\mathcal{S}$, la mediatriz de $AB$ sea un eje de simetría de $\mathcal{S}$.

**40 IMO 2.** Sea $n \geq 2$ un entero fijo.

1) Hallar la mínima constante $C$ tal que para todo conjunto de $n$ números reales no negativos $x_1$, $x_2$, ... ,$x_n$, se cumpla

$$\sum_{1 \leq i < j \leq n} x_i x_j (x_i^2 + x_j^2) \leq C \left( \sum_{i=1}^{n} x_i \right)^4 .$$

2) Para este valor de $C$, determinar en qué condiciones se cumple la igualdad.

**40 IMO 3.** Tenemos un tablero cuadrado $n \times n$, con $n$ par. Dos cuadrados distintos del tablero se llaman adyacentes si comparten un lado común. (Un cuadrado no es adyacente a sí mismo). Hallar el número mínimo de cuadrados que se pueden marcar de forma que todo cuadrado, marcado o no, sea adyacente al menos a un cuadrado marcado.

17 de Julio de 1999

Segunda sesión: 4 h 30 min

**40 IMO 4.** Hallar los pares $(n, p)$ de enteros positivos tales que

1) $p$ es primo.

2) $n \leq 2p$.

3) $(p-1)^n + 1$ es divisible por $n^{p-1}$.

**40 IMO 5.** Los círculos $\Gamma_1$ y $\Gamma_2$ están dentro del círculo $\Gamma$, y son tangentes a él en $M$ y $N$, respectivamente. Sabemos que $\Gamma_1$ pasa por el centro de $\Gamma_2$. La cuerda común de $\Gamma_1$ y $\Gamma_2$, extendida, corta a $\Gamma$ en $A$ y $B$. Las rectas $MA$ y $MB$ cortan a $\Gamma_1$ de nuevo en $C$ y $D$. Demostrar que la recta $CD$ es tangente a $\Gamma_2$.

**40 IMO 6.** Determinar todas las funciones $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tales que

$$f\big(x - f(y)\big) = f\big(f(y)\big) + x\,f(y) + f(x) - 1,$$

para todo $x, y \in \mathbb{R}$.

# 2000 — XLI Olimpiada Matemática Internacional — 41

Taejon, Corea del Sur

19 de Julio de 2000

Primera sesión: 4 h 30 min

**41 IMO 1.** Dos circunferencias $\Gamma_1$ y $\Gamma_2$ se cortan en $M$ y $N$. Sea $l$ la tangente común a $\Gamma_1$ y $\Gamma_2$ tal que $M$ está más cerca de $l$ que $N$. La recta $l$ es tangente a $\Gamma_1$ en $A$ y a $\Gamma_2$ en $B$. La recta paralela a $l$ que pasa por $M$ corta de nuevo a $\Gamma_1$ en $C$ y a $\Gamma_2$ en $D$. Las rectas $CA$ y $DB$ se cortan en $E$; las rectas $AN$ y $CD$ se cortan en $P$; las rectas $BN$ y $CD$ se cortan en $Q$. Demostrar que $EP = EQ$.

**41 IMO 2.** Sean $a$, $b$, $c$ números reales positivos tales que $abc = 1$. Demostrar que

$$\left(a - 1 + \frac{1}{b}\right)\left(b - 1 + \frac{1}{c}\right)\left(c - 1 + \frac{1}{a}\right) \leq 1.$$

**41 IMO 3.** Sea $n \geq 2$ un número entero positivo. Inicialmente hay $n$ pulgas en una recta horizontal, y no todas están en el mismo punto. Para un número real positivo $\lambda$, definimos un *salto* como sigue: Se eligen dos pulgas cualesquiera situadas en puntos $A$ y $B$, con $A$ a la izquierda de $B$; luego, la pulga situada en $A$ salta hasta el punto $C$ de la recta, situado a la derecha de $B$, y tal que $\frac{BC}{AB} = \lambda$.
Determinar todos los valores de $\lambda$ tales que, para cualquier punto $M$ de la recta y cualesquiera posiciones iniciales de las $n$ pulgas, existe una sucesión finita de saltos que permite situar a todas las pulgas a la derecha de $M$.

2000 **XLI Olimpiada Matemática Internacional** 41

Taejon, Corea del Sur

20 de Julio de 2000

Segunda sesión: 4 h 30 min

**41 IMO 4.** Un mago tiene cien tarjetas numeradas desde 1 hasta 100. Las coloca en tres cajas: una roja, una blanca y una azul, de modo que cada caja contiene por lo menos una tarjeta. Una persona del público selecciona dos de las tres cajas, elige una tarjeta de cada una y anuncia a la audiencia la suma de los números de las dos tarjetas elegidas. Al conocer esta suma, el mago identifica la caja de la que no se eligió ninguna tarjeta.

¿De cuántas maneras se pueden distribuir todas las tarjetas en las cajas de modo que este truco siempre funcione?

(Dos maneras de distribuir se consideran distintas, si al menos hay una tarjeta que es colocada en una caja diferente en cada distribución).

**41 IMO 5.** Determinar si existe un entero positivo $n$ tal que exactamente 2000 números primos dividen a $n$, y $n$ divide a $2^n + 1$.

**41 IMO 6.** Sean $AH_1$, $BH_2$ y $CH_3$ las alturas de un triángulo acutángulo $ABC$. La circunferencia inscrita al triángulo $ABC$ es tangente a los lados $BC$, $CA$ y $AB$ en los puntos $T_1$, $T_2$ y $T_3$, respectivamente. Sea $l_1$ la recta simétrica de $H_2H_3$ con respecto a $T_2T_3$; $l_2$ la recta simétrica de $H_3H_1$ con respecto a $T_3T_1$, y $l_3$ la recta simétrica de $H_1H_2$ respecto a $T_1T_2$.

Demostrar que $l_1$, $l_2$, $l_3$ determinan un triángulo cuyos vértices son puntos de la circunferencia inscrita en el triángulo $ABC$.

2001 | XLII Olimpiada Matemática Internacional | 42

Washington DC, USA

---

8 de Julio de 2001

Primera sesión: 4 h 30 min

**42 IMO 1.** Sea $ABC$ un triángulo acutángulo con circuncentro $O$. Sea $P$ sobre $BC$ el pie de la altura por $A$. Supongamos que $\widehat{BCA} \geq \widehat{ABC} + 30°$.
Demostrar que $\widehat{CAB} + \widehat{COP} < 90°$.

**42 IMO 2.** Demostrar que, cualesquiera que sean los números reales positivos $a$, $b$, $c$, se cumple

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}} + \frac{b}{\sqrt{b^{+}8ca}} + \frac{c}{\sqrt{c^2+8ab}} \geq 1.$$

**42 IMO 3.** En un concurso matemático hay 21 chicas y 21 chicos. Sabemos que

1) Cada participante ha resuleto a lo sumo seis problemas.

2) Para cada chica y cada chico, al menos hay un problema resuelto por ambos.

Demostrar que hay un problema que al menos ha sido resuelto por tres chicas y al menos por tres chicos.

9 de Julio de 2001

Segunda sesión: 4 h 30 min

**42 IMO 4.** Sea $n$ un entero mayor que 1, y sean $k_1$, $k_2$, ..., $k_n$ enteros dados. Para cada una de las $n!$ permutaciones $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ de $1, 2, \ldots, n$, sea

$$S(a) = \sum_{i=1}^{n} k_i a_i.$$

Demostrar que existen dos permutaciones $b$ y $c$, $b \neq c$, tal que $n!$ es un divisor de $S(b) - S(c)$.

**42 IMO 5.** En un triángulo $ABC$, sea $AP$ la bisectriz de $\widehat{BAC}$, con $P$ sobre $BC$; y sea $BQ$ la bisectriz de $\widehat{ABC}$ con $Q$ sobre $CA$. Sabemos que $\widehat{BAC} = 60^\circ$ y que $AB + BP = AQ + QB$. ¿Cuáles son los posibles ángulos del triángulo $ABC$?

**42 IMO 6.** Sean $a$, $b$, $c$, $d$ enteros con $a > b > c > d > 0$. Supongamos que

$$ac + bd = (b + d + a - c)(b + d - a + c).$$

Demostrar que $ab + cd$ no es primo.

24 de Julio de 2002

Primera sesión: 4 h 30 min

**43 IMO 1.** Sea $n$ un entero positivo. Sea $T$ el conjunto de puntos $(x, y)$ del plano tales que $x$ e $y$ son enteros no negativos con $x + y < n$. Cada punto de $T$ se colorea de azul o rojo. Si un punto $(x, y)$ es rojo, entonces también son rojos todos los puntos $(x', y')$ de $T$ tales que $x' \leq x$ y $y' \leq y$. Se dice que un conjunto de $n$ puntos azules es de tipo $X$ si las coordenadas $x$ de sus puntos son todas distintas. Se dice que un conjunto de $n$ puntos azules es de tipo $Y$ si las coordenadas $y$ de sus puntos son todas distintas. Demostrar que el número de conjuntos de tipo $X$ es igual al número de conjuntos de tipo $Y$.

**43 IMO 2.** Sea $BC$ un diámetro de la circunferencia $\Gamma$ de centro $O$. Sea $A$ un punto de $\Gamma$ tal que $0° < \widehat{AOB} < 120°$. Sea $D$ el punto medio del arco $AB$ que no contiene a $C$. La recta que pasa por $O$ y es paralela a $DA$ intersecta a la recta $AC$ en $J$. La mediatriz de $OA$ intersecta a $\Gamma$ en $E$ y en $F$. Demostrar que $J$ es el incentro del triángulo $CEF$.

**43 IMO 3.** Hallar todas las parejas de enteros $m, n \geq 3$ para las cuales existen infinitos enteros positivos $a$ tales que

$$\frac{a^m + a - 1}{a^n + a^2 - 1}$$

es entero.

25 de Julio de 2002

Segunda sesión: 4 h 30 min

**43 IMO 4.** Sea $n$ un entero mayor que 1. Los enteros positivos divisores de $n$ son $d_1$, $d_2$, ..., $d_k$ con

$$1 = d_1 < d_2 < \cdots < d_k = n.$$

Se define $D = d_1d_2 + d_2d_3 + \cdots + d_{k-1}d_k$.

a) Demostrar que $D < n^2$.

b) Determinar todos los números $n$ tales que $D$ es un divisor de $n^2$.

**43 IMO 5.** Sea $\mathbb{R}$ el conjunto de los números reales. Hallar todas las funciones $f$ de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ tales que

$$\big(f(x) + f(z)\big)\big(f(y) + f(t)\big) = f(xy - zt) + f(xt + yz)$$

para todos los $x, y, z, t$ en $\mathbb{R}$.

**43 IMO 6.** En el plano, sean $\Gamma_1$, $\Gamma_2$, ..., $\Gamma_n$ circunferencias de radio 1, donde $n \geq 3$. Sean sus centros $O_1$, $O_2$, ..., $O_n$ respectivamente. Supongamos que ninguna recta del plano intersecta a más de dos de las circunferencias dadas. Demostrar que

$$\sum_{1 \leq i < j \leq n} \frac{1}{O_iO_j} < \frac{(n-1)\pi}{4}.$$

13 de Julio de 2003

Primera sesión: 4 h 30 min

**44 IMO 1.** Sea $A$ un subconjunto del conjunto $S = \{1, 2, \ldots, 1\,000\,000\}$ que contiene exactamente 101 elementos. Demostrar que existen números $t_1$, $t_2$, ..., $t_{100}$ en $S$ tales que los conjuntos

$$A_j = \{x + t_j \mid x \in A\} \quad \text{para} \quad j = 1, 2, \ldots, 100$$

son dos a dos disjuntos.

**44 IMO 2.** Determinar todos los pares $(a, b)$ de enteros positivos tales que

$$\frac{a^2}{2ab^2 - b^3 + 1}$$

es un entero positivo.

**44 IMO 3.** Nos dan un hexágono convexo en el que cada par de lados opuestos tiene la propiedad siguiente: a distancia entre sus puntos medios es $\sqrt{3}/2$ veces la suma de sus longitudes. Demostrar que los ángulos del hexágono son iguales.
(Un hexágono convexo $ABCDEF$ tiene tres pares de lados opuestos: $AB$ y $DE$, $BC$ y $EF$, $CD$ y $FA$.)

14 de Julio de 2003

Segunda sesión: 4 h 30 min

**44 IMO 4.** Sea $ABCD$ un cuadrilátero cíclico. Sean $P$, $Q$ y $R$ los pies de las perpendiculares desde $D$ a las rectas $BC$, $CA$ y $AB$, respectivamente. Demostrar que $PQ = QR$ si y sólo si las bisectrices de $\widehat{ABC}$ y $\widehat{ADC}$ se cortan sobre $AC$.

**44 IMO 5.** Sea $n$ un entero positivo y $x_1, x_2, \ldots, x_n$ números reales que cumplen $x \leq x_2 \leq \cdots \leq x_n$.

(a) Demostrar que

$$\left( \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} |x_i - x_j| \right)^2 \leq \frac{2(n^2-1)}{3} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} (x_i - x_j)^2.$$

(b) Demostrar que se cumple la igualdad si y sólo si los $x_1, x_2, \ldots, x_n$ forman una progresión aritmética.

**44 IMO 6.** Sea $p$ un número primo. Demostrar que existe un primo $q$ tal que, para todo entero $n$, el número $n^p - n$ es divisible por $q$.

# OLIMPIADAS IBEROAMERICANAS de MATEMÁTICAS

# 1 (1985)

## A

# 18 (2003)

11 de Diciembre de 1985

Primera sesión: 4 h 30 min

**1 OIM 1.** Hallar todas las ternas de enteros $(a, b, c)$ tales que:

$$a + b + c = 24$$
$$a^2 + b^2 + c^2 = 210$$
$$a\,b\,c = 440.$$

**1 OIM 2.** Sea $P$ un punto interior del triángulo equilátero $ABC$ tal que: $PA = 5$, $PB = 7$, y $PC = 8$.
Hallar la longitud de un lado del triángulo $ABC$.

**1 OIM 3.** Hallar las raíces $r_1$, $r_2$, $r_3$ y $r_4$ de la ecuación $4x^4 - ax^3 + bx^2 - cx + 5 = 0$, sabiendo que son reales, positivas y que:

$$\frac{r_1}{2} + \frac{r_2}{4} + \frac{r_3}{5} + \frac{r_4}{8} = 1.$$

12 de Diciembre de 1985

Segunda sesión: 4 h 30 min

**1 OIM 4.** Si $x$ es distinto de 1, $y$ es distinto de 1, $x \neq y$ y además

$$\frac{yz - x^2}{1 - x} = \frac{xz - y^2}{1 - y},$$

demuestre que ambas fracciones son iguales a $x + y + z$.

**1 OIM 5.** A cada entero positivo $n$ se le asigna un entero no negativo $f(n)$ de tal manera que se satisfagan las siguientes condiciones:

$f(r\,s) = f(r) + f(s)$,

$f(n) = 0$, siempre que la cifra en las unidades de $n$ sea 3

$f(10) = 0$.

Hallar $f(1985)$. Justificar la respuesta.

**1 OIM 6.** Dado el triángulo acutángulo $ABC$, se consideran los puntos $D$, $E$ y $F$ de las rectas $BC$, $CA$ y $AB$ respectivamente. Si las rectas $AD$, $BE$ y $CF$ pasan todas por el centro $O$ de la circunferencia circunscrita al triángulo $ABC$, cuyo radio es $R$, demostrar que

$$\frac{1}{AD} + \frac{1}{BE} + \frac{1}{CF} = \frac{2}{R}.$$

28 de Enero de 1987

Primera sesión: 4 h 30 min

**2 OIM 1.** Hallar las funciones $f(x)$ tales que

$$\big(f(x)\big)^2 f\left(\frac{1-x}{1+x}\right) = 64x$$

para todo $x$ distinto de $0$, $1$ y $-1$.

**2 OIM 2.** En un triángulo $ABC$, $M$ y $N$ son los puntos medios de los lados $AC$ y $AB$, respectivamente; y $P$ es el punto de intersección de $BM$ y $CN$. Demostrar que si es posible inscribir una circunferencia en el cuadrilátero $ANMP$, entonces el triángulo $ABC$ es isósceles.

**2 OIM 3.** Demostrar que si $m$, $n$, $r$ son enteros positivos no nulos tales que

$$1 + m + n\sqrt{3} = \big(2 + \sqrt{3}\big)^{2r-1},$$

entonces $m$ es un cuadrado perfecto.

29 de Enero de 1987

Segunda sesión: 4 h 30 min

**2 OIM 4.** Se define una sucesión $p_n$ de la siguiente manera: $p_1 = 2$, y para todo $n$ mayor o igual que 2, $p_n$ es el mayor divisor primo de $p_1 p_2 \ldots p_{n-1} + 1$.
Demostrar que $p_n \neq 5$.

**2 OIM 5.** Sean $r$, $s$, $t$ las raíces de la ecuación $x(x-2)(3x-7) = 2$.

1) Demostrar que $r$, $s$, $t$ son positivos.

2) Calcular $\arctan r + \arctan s + \arctan t$.

(Se denota por $\arctan x$ el arco comprendido entre $0$ y $\pi$ cuya tangente es $x$).

**2 OIM 6.** Sea $ABCD$ un cuadrilátero plano convexo. Sean $P$, $Q$ puntos de $AD$ y $BC$, respectivamente, tales que

$$\frac{AP}{PD} = \frac{AB}{DC} = \frac{BQ}{QC}.$$

Demostrar que los ángulos que forma la recta $PQ$ con las rectas $AB$ y $CD$ son iguales.

27 de Abril de 1988

Primera sesión: 4 h 30 min

**3 OIM 1.** Las medidas de los ángulos de un triángulo están en progresión aritmética y las longitudes de las alturas también están en progresión aritmética. Demostrar que el triángulo es equilátero.

**3 OIM 2.** Sean $a$, $b$, $c$, $d$, $p$, $q$ números naturales que cumplen

$$ad - bc = 1 \quad \text{y} \quad \frac{a}{b} > \frac{p}{q} > \frac{c}{d}.$$

Demostrar que

1) $q \geq b + d$.

2) Si $q = b + d$, entonces $p = a + c$.

**3 OIM 3.** Demostrar que entre todos los triángulos cuyos vértices distan 3, 5 y 7 de un punto dado $P$, el que tiene mayor perímetro tiena a $P$ como incentro.

28 de Abril de 1988

Segunda sesión: 4 h 30 min

**3 OIM 4.** Sea $ABC$ un triángulo cuyos lados son $a$, $b$, $c$. Se divide cada lado de $ABC$ en $n$ segmentos iguales. Sea $S$ la suma de los cuadrados de las distancias de cada vértice a cada uno de los puntos de división del lado opuesto, distintos de los vértices. Demostrar que

$$\frac{S}{a^2+b^2+c^2}$$

es un número racional.

**3 OIM 5.** Considérense las expresiones de la forma $x+y\,t+z\,t^2$, con $x$, $y$, $z$ racionales y $t^3=2$. Demostrar que si $x+y\,t+z\,t^2\neq 0$, entonces existen $u$, $v$, $w$ racionales tales que

$$\left(x+y\,t+z\,t^2\right)\left(u+v\,t+w\,t^2\right)=1.$$

**3 OIM 6.** Considérense los conjuntos de $n$ números naturales diferentes de cero en los cuales no hay tres elementos en progresión aritmética. Demostrar que en uno de esos conjuntos, la suma de los inversos de sus elementos es máxima.

10 de Abril de 1989

Primera sesión: 4 h 30 min

**4 OIM 1.** Determinar todas las ternas de números reales que satisfacen el sistema de ecuaciones siguiente:

$$\begin{cases} x + y - z = -1 \\ x^2 - y^2 + z^2 = 1 \\ -x^3 + y^3 + z^3 = -1 \end{cases}$$

**4 OIM 2.** Sean $x$, $y$, $z$ tres números reales tales que $0 < x < y < z < \pi/2$. Demostrar la siguiente desigualdad.

$$\frac{\pi}{2} + 2\sin x \cos y + 2\sin y \cos z > \sin 2x + \sin 2y + \sin 2z.$$

**4 OIM 3.** Sean $a$, $b$, $c$ las longitudes de los lados de un triángulo. Demostrar que

$$\left| \frac{a-b}{a+b} + \frac{b-c}{b+c} + \frac{c-a}{c+a} \right| < \frac{1}{16}.$$

11 de Abril de 1989

Segunda sesión: 4 h 30 min

**4 OIM 4.** La circunferencia inscrita en el triángulo $ABC$ es tangente a los lados $AC$ y $BC$ en los puntos $M$ y $N$, respectivamente. Las bisectrices de $A$ y $B$ cortan a $MN$ en los puntos $P$ y $Q$, respectivamente. Sea $O$ el incentro del triángulo $ABC$. Demostrar que

$$\overline{MP}\ \overline{OA} = \overline{BC}\ \overline{OQ}.$$

**4 OIM 5.** Sea la función $f$ definida por

$$f(1) = 1$$
$$f(2n+1) = f(2n) + 1$$
$$f(2n) = 3\,f(n)$$

Determinar el conjunto de valores que toma $f$.

**4 OIM 6.** Mostrar que hay una infinidad de pares de números naturales que satisfacen la ecuación

$$2x^2 - 3x - 3y^2 - y + 1 = 0.$$

26 de Setiembre de 1990

Primera sesión: 4 h 30 min

**5 OIM 1.** Sea $f$ una función definida en el conjunto de los números enteros mayores o iguales que cero, que satisface las condiciones siguientes:

Si $n = 2^j - 1$ para $j = 0, 1, 2, \ldots,$ entonces $f(n) = 0$

Si $n \neq 2^j - 1$ para $j = 0, 1, 2, \ldots,$ entonces $f(n+1) = f(n) - 1$.

1) Demostrar que para todo entero $n$, mayor o igual que cero, existe un entero $k$ mayor o igual que cero tal que $f(n) + n = 2^k - 1$.

2) Calcular $f(2^{1990})$.

**5 OIM 2.** En un triángulo $ABC$, sea $I$ el centro de la circunferencia inscrita y $D$, $E$, $F$ sus puntos de tangencia con los lados $BC$, $AC$, $AB$, respectivamente. Sea $P$ el otro punto de intersección de la recta $AD$ con la circunferencia inscrita. Si $M$ es el punto medio de $EF$, demostrar que los cuatro puntos $P$, $I$, $M$ y $D$ pertenecen a una misma circunferencia o están alineados.

**5 OIM 3.** Sea $f(x) = (x+b)^2 - c$ un polinomio con $b$, $c$ números enteros.

1) Si $p$ es un número primo tal que $p$ divide a $c$ y $p^2$ no divide a $c$, demostrar que, cualquiera que sea el número entero $n$, $p^2$ no divide a $f(n)$.

2) Sea $q$ un número primo distinto de 2 que no divide a $c$. Si $q$ divide a $f(n)$ para algún número entero $n$, demostrar que para cada entero positivo $r$ existe un número entero $n'$ tal que $q^r$ divide a $f(n')$.

27 de Setiembre de 1990

Segunda sesión: 4 h 30 min

**5 OIM 4.** Sea $C_1$ una circunferencia, $AB$ uno de sus diámetros, $t$ su tangente en $B$ y $M$ un punto de $C_1$ distinto de $A$ y de $B$. Se construye una circunferencia $C_2$ tangente a $C_1$ en $M$ y a la recta $t$.

1) Determinar el punto $P$ de tangencia de $t$ y $C_2$, y hallar el lugar geométrico de los centros de las circunferencias $C_2$ al variar $M$.

2) Demostrar que existe una circunferencia ortogonal a todas las circunferencias $C_2$.

Nota: Dos circunferencias son ortogonales si se cortan, y las tangentes respectivas en los puntos de intersección son ortogonales.

**5 OIM 5.** Sean $A$ y $B$ los vértices opuestos de un tablero cuadriculado de $n \times n$ casillas ($n \geq 1$), a cada una de las cuales se añade su diagonal en la dirección $AB$, formándose así $2n^2$ triángulos iguales. Se mueve una ficha recorriendo un camino que va desde $A$ hasta $B$ formado por segmentos del tablero, y se coloca, cada vez que se recorre un segmento, una semilla en cada uno de los triángulos que admiten ese segmento como lado. El camino se recorre de tal forma que no se pasa por ningún segmento más de una vez, y se observa, después del recorrido, que hay exactamente dos semillas en cada uno de los $2n^2$ triángulos del tablero. ¿Para qué valores de $n$ es posible esta situación?

**5 OIM 6.** Sea $f(x)$ un polinomio de grado 3 con coeficientes racionales. Probar que si el gráfico de $f$ es tangente al eje $X$, entonces $f(x)$ tiene sus tres raíces racionales.

24 de Setiembre de 1991

Primera sesión: 4 h 30 min

**6 OIM 1.** A cada vértice de un cubo se le asigna el valor $+1$ o $-1$, y a cada cara el producto de los valores asignados a sus vértices. ¿Qué valores puede tomar la suma de los catorce números así obtenidos?

**6 OIM 2.** Dos rectas perpendiculares dividen un cuadrado en cuatro partes, tres de las cuales tienen cada una un àrea igual a 1. Demostrar que el área del cuadrado es 4.

**6 OIM 3.** Sea $F$ una función creciente definida para todo número real $x$, $0 \leq x \leq 1$, tal que

$$\begin{aligned} &F(0) = 0 \\ &F\left(\frac{x}{3}\right) = \frac{F(x)}{2} \\ &F(1-x) = 1 - F(x). \end{aligned}$$

Encontrar $F\left(\frac{18}{1991}\right)$.

25 de Setiembre de 1991

Segunda sesión: 4 h 30 min

**6 OIM 4.** Encontrar un número $N$ de cinco cifras diferentes y no nulas, que sea igual a la suma de todos los números de tres cifras distintas que se pueden formar con las cinco cifras de $N$.

**6 OIM 5.** Sea $P(X,Y) = 2X^2 - 6XY + 5Y^2$. Diremos que un número entero $a$ es un valor de $P$ si existen números enteros $b$ y $c$ tales que $a = P(b,c)$.

1) Determinar cuántos elementos de $\{1, 2, \ldots, 100\}$ son valores de $P$.

2) Probar que el producto de valores de $P$ es un valor de $P$.

**6 OIM 6.** Dados tres puntos no alineados $M$, $N$ y $P$, sabemos que $M$ y $N$ son los puntos medios de los lados de un triángulo y que $P$ es el punto de intersección de las alturas de dicho triángulo. Construir el triángulo.

22 de Setiembre de 1992

Primera sesión: 4 h 30 min

**7 OIM 1.** Para cada entero positivo $n$, sea $a_n$ el último dígito del número $1+2+3+\cdots+n$. Calcular $a_1+a_2+\cdots+a_{1992}$.

**7 OIM 2.** Dados $n$ números reales tales que $0<a_1<a_2<\cdots<a_n$ y dada la función

$$f(x)=\frac{a_1}{x+a_1}+\frac{a_2}{x+a_2}+\cdots+\frac{a_n}{x+a_n},$$

determinar la suma de las longitudes de los intervalos, disjuntos dos a dos, formados por todos los valores $x$ tales que $f(x)>1$.

**7 OIM 3.** En un triángulo equilátero $ABC$ cuyo lado tiene longitud 2, se inscribe una circunferencia $\Gamma$.

1) Demostrar que para cada punto $P$ de $\Gamma$, la suma de los cuadrados de sus distancias a los vértices $A$, $B$ y $C$ es 5.

2) Demostrar que para todo punto $P$ de $\Gamma$ es posible construir un triángulo cuyos lados tienen las longitudes de los segmentos $AP$, $BP$ y $CP$, y cuya área $\sqrt{3}/4$.

23 de Setiembre de 1992

Segunda sesión: 4 h 30 min

**7 OIM 4.** Sean $(a_n)$ y $(b_n)$ dos sucesiones de números enteros que cumplen las condiciones siguientes

1) $a_0 = 0$ y $b_0 = 8$.

2) $a_{n+2} = 2a_{n+1} - a_n + 2$ y $b_{n+2} = 2b_{n+1} - b_n$.

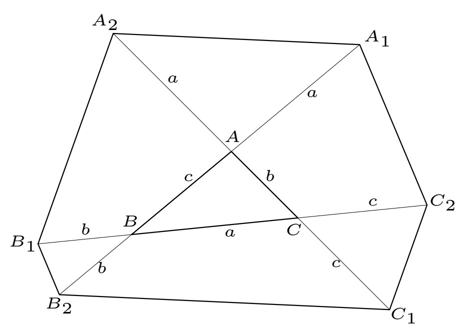
3) $a_n^2 + b_n^2$ es un cuadrado perfecto para todo $n$.

Determinar por lo menos dos valores del par $(a_{1992}, b_{1992})$.

**7 OIM 5.** Sea $\Gamma$ una circunferencia, y sean $h$ y $m$ números positivos tales que existe un trapecio $ABCD$ inscrito en $\Gamma$, de altura $h$ y tal que la suma de las bases $AB+CD$ es $m$. Construir el trapecio $ABCD$.

**7 OIM 6.**

A partir del triángulo $T$ de vértices $A$, $B$ y $C$ se ha construido un hexágono $H$ de vértices $A_1$, $A_2$, $B_1$, $B_2$, $C_1$ y $C_2$ tal como muestra la figura. Demostrar que el área del hexágono $H$ es mayor o igual que trece veces el área del triángulo $T$.



14 de Setiembre de 1993

Primera sesión: 4 h 30 min

**8 OIM 1.** Un número natural es *capicúa* si al escribirlo en notación decimal se puede leer de igual forma de izquierda a derecha como de derecha a izquierda. Por ejemplo, $8$, $23432$, $6446$. Sean $x_1 < x_2 < \cdots < x_i < x_{i+1} < \cdots$ todos los números capicúas. Para cada $i$, sea $y_i = x_{i+1} - x_i$. ¿Cuántos números primos distintos tiene el conjunto $\{y_1, y_2, y_3, \ldots\}$?

**8 OIM 2.** Demostrar que para cualquier polígono convexo de área 1, existe un paralelogramo de área 2 que lo contiene.

**8 OIM 3.** Sea $\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, \ldots\}$. hallar todas las funciones $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ tales que
1) Si $x < y$, entonces $f(x) < f(y)$.
2) $f\big(yf(x)\big) = x^2 f(xy)$ para todos los $x, y \in \mathbb{N}^*$.

15 de Setiembre de 1993

Segunda sesión: 4 h 30 min

**8 OIM 4.** Sea $ABC$ un triángulo equilátero y $\Gamma$ su círculo inscrito. Si $D$ y $E$ son puntos de los lados $AB$ y $AC$, respectivamente, tales que $DE$ es tangente a $\Gamma$, demostrar que

$$\frac{AD}{DB} + \frac{AE}{EC} = 1.$$

**8 OIM 5.** Sean $P$ y $Q$ dos puntos distintos en el plano. Denotaremos por $m(PQ)$ la mediatriz del segmento $PQ$. Sea $\mathcal{S}$ un subconjunto finito del plano, con más de un elemento, que satisface las siguientes propiedades:

1) Si $P$ y $Q$ están en $\mathcal{S}$, entonces $m(PQ)$ intersecta a $\mathcal{S}$.

2) Si $P_1Q_1$, $P_2Q_2$ y $P_3Q_3$ son tres segmentos diferentes cuyos extremos son puntos de $\mathcal{S}$, entonces no existe ningún punto de $\mathcal{S}$ en la intersección de $m(P_1Q_1)$, $m(P_2Q_2)$ y $m(P_3Q_3)$.

Determinar el número de puntos que puede tener $\mathcal{S}$.

**8 OIM 6.** Dos números enteros no negativos $a$ y $b$ son *cuates* si $a+b$ tiene solamente ceros y unos en su expresión decimal. Sean $A$ y $B$ dos conjuntos infinitos de enteros no negativos tales que $B$ es el conjunto de todos los números que son cuates de todos los elementos de $A$, y $A$ es el conjunto de todos los números que son cuates de todos los elementos de $B$.

Demostrar que en uno de los dos conjuntos, $A$ o $B$, hay infinitos pares de números $x$ e $y$ tales que $x - y = 1$.

20 de Setiembre de 1994

Primera sesión: 4 h 30 min

**9 OIM 1.** Se dice que un número natural $n$ es *sensato* si existe un entero $r$, con $1 < r < n-1$, tal que la representación de $n$ en base $r$ tiene todas sus cifras iguales. Por ejemplo, 62 y 15 son sensatos ya que $62 = 222_{(5}$ y $15 = 33_{(4}$. Demostrar que 1993 no es sensato, pero que 1994 sí lo es.

**9 OIM 2.** Sea un cuadrilátero inscrito en una circunferencia, cuyos vértices se denotan consecutivamente por $A$, $B$, $C$ y $D$. Se supone que existe una semicircunferencia con centro en $AB$ tangente a los otros tres lados del cuadrilátero.

1) Demostrar que $AB = AD + BC$.

2) Calcular, en función de $x = AB$ e $y = CD$, el área máxima que puede alcanzar un cuadrilátero que satisface las condiciones del enunciado.

**9 OIM 3.** En cada casilla de un tablero $n \times n$ hay una lámpara. Al ser tocada una lámpara cambian de estado ella misma y todas las lámparas situadas en la fila y la columna que ella determina (las que están encendidas se apagan y las apagadas se encienden). Inicialmente todas están apagadas. Demostrar que siempre es posible, con una sucesión adecuada de toques, que todo el tablero quede encendido, y encontrar, en función de $n$, el mínimo número de toques para que se enciendan todas las lámparas.

21 de Setiembre de 1994

Segunda sesión: 4 h 30 min

**9 OIM 4.** Se dan los puntos $A$, $B$ y $C$ sobre una circunferencia $K$ de manera que el triángulo $ABC$ es acutángulo. Sea $P$ un punto interior a $K$. Se trazan las rectas $AP$, $BP$ y $CP$ que cortan de nuevo a la circunferencia en $X$, $Y$ y $Z$. Determinar el punto $P$ para que el triángulo $XYZ$ sea equilátero.

**9 OIM 5.** Sean $n$ y $r$ dos enteros positivos. Se desea construir $r$ subconjuntos $A_1$, $A_2$, ..., $A_r$ de $\{0, 1, \ldots, n-1\}$, cada uno de ellos con $k$ elementos exactamente y tales que, para cada número entero $x$, $0 \leq x \leq n-1$, existen $x_1$ en $A_1$, $x_2$ en $A_2$, ..., $x_r$ en $A_r$, (un elemento en cada conjunto) con $x = x_1 + x_2 + \cdots + x_r$.
Hallar el menor valor posible de $k$ en función de $n$ y $r$.

**9 OIM 6.** Demostrar que todo número natural $n \leq 2^{1\,000\,000}$ puede ser obtenido a partir de 1 haciendo menos de 1 100 000 sumas; más precisamente, hay una sucesión finita de números naturales $x_0, x_1, \ldots, x_k$ con $k < 1\,100\,000$, $x_0 = 1$, $x_k = n$, tal que para cada $i = 1, 2, \ldots, k$ existen $r$, $s$ con $0 \leq r < i$, $0 \leq s < i$ y $x_i = x_r + x_s$.

26 de Setiembre de 1995

Primera sesión: 4 h 30 min

**10 OIM 1.** Determine los posibles valores de la suma de los dígitos de todos los cuadrados perfectos.

**10 OIM 2.** Sea $n$ un número entero mayor que 1. Determinar los números reales $x_1, x_2, \ldots, x_n \geq 1$ y $x_{n+1} > 0$ que satisfacen las dos condiciones siguientes

1) $\sqrt{x_1} + \sqrt[3]{x_2} + \cdots + \sqrt[n+1]{x_n} = n\sqrt{x_{n+1}}$

2) $\dfrac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} = x_{n+1}$

**10 OIM 3.** Sean $r$ y $s$ dos rectas ortogonales y que no están en el mismo plano. Sea $AB$ su perpendicular común, donde $A$ pertenece a $r$ y $B$ pertenece a $s$. Se considera la esfera de diámetro $AB$. Los puntos $M$, de la recta $r$, y $N$ de la recta $s$, son variables, con la condición de que $MN$ sea tangente a la esfera en un punto $T$. Determinar el lugar geométrico de $T$.

*Nota:* El plano que contiene a $B$ y a $r$ es perpendicular a $s$.

27 de Setiembre de 1995
Segunda sesión: 4 h 30 min

**10 OIM 4.** En un tablero de $m \times m$ casillas se colocan fichas. Cada ficha colocada en el tablero *domina* todas las casillas de la fila (—), columna $\big|$, y diagonal $\setminus$ a la que pertence(*). Determinar el menor número de fichas que deben colocarse para que queden "dominadas" todas las casillas del tablero.
*Nota:* Obsérvese que la ficha no "domina" la diagonal $/$.

**10 OIM 5.** La circunferencia inscrita en el triángulo $ABC$ es tangente a $BC$, $CA$ y $AB$ en $D$, $E$ y $F$, respectivamente. Supongamos que dicha circunferencia corta de nuevo a $AD$ en su punto medio $X$, es decir, $AX = XD$. Las rectas $XB$ e $XC$ cortan de nuevo a la circunferencia inscrita en $Y$ y $Z$, respectivamente. Demostrar que $EY = FZ$.

**10 OIM 6.** Una función $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ es circular si para cada $p$ en $\mathbb{N}$ existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $n \le p$ y

$$f^n(p) = \underbrace{f\Big(f\big(\ldots f(p)\big)\Big)}_{n \text{ veces}} = p.$$

La función tiene grado de repulsión $k$, $0 < k < 1$, si para cada $p \in \mathbb{N}$, es $f^i(p) \neq p$ para todo $i \le [kp]$ (*).
Determinar el mayor grado de repulsión que puede tener una función circular.
*Nota:* $[x]$ indica la parte entera de $x$.

24 de Setiembre de 1996

Primera sesión: 4 h 30 min

**11 OIM 1.** Sea $n$ un número natural. Un cubo de arista $n$ puede ser dividido en 1996 cubos cuyas aristas son tambien números naturales. Determinar el menor valor posible de $n$.

**11 OIM 2.** Sea $M$ el punto medio de la mediana $AD$ del triángulo $ABC$ ($D$ pertenece al lado $BC$). La recta $BM$ corta al lado $AC$ en el punto $N$. Demostrar que $AB$ es tangente a la circunferencia circunscrita al triángulo $NBC$ si, y solamente si, se cumple la igualdad

$$\frac{BM}{MN} = \frac{(BC)^2}{(BN)^2}.$$

**11 OIM 3.** Tenemos un tablero cuadriculado de $k^2-k+1$ filas y $k^2-k+1$ columnas, donde $k = p+1$ y $p$ es un número primo. Para cada primo $p$, hay que dar un método para distribuir números 0 y 1, un número en cada casilla del tablero, de modo que en cada fila haya exactamente $k$ números 0, en cada columna haya exactamente $k$ números 0 y además no haya ningún rectángulo de lados paralelos a los lados del tablero con números 0 en sus vértices.

25 de Setiembre de 1996

Segunda sesión: 4 h 30 min

**11 OIM 4.** Dado un número natural $n \geq 2$, considérense todas las fracciones de la forma $\frac{1}{ab}$, donde $a$ y $b$ son números naturales primos entre sí y tales que

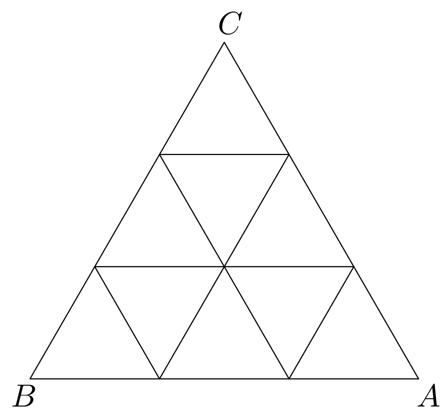
$$a < b < n$$

$$a + b > n.$$

Demostrar que para cada $n$ la suma de estas fracciones es $1/2$.

**11 OIM 5.**

Tres fichas $A$, $B$ y $C$ están situadas una en cada vértice de un triángulo equilátero de lado $n$. Se ha dividido el triángulo en triangulos equiláteros más pequeños, de lado 1. La figura muestra el caso $n = 3$. Inicialmente todas las líneas de la figura están pintadas de azul. Las fichas se desplazan por líneas, pintando de rojo su trayectoria, de acuerdo con las dos reglas siguientes:




1) Primero se mueve $A$, después $B$, y después $C$, después $A$, y así sucesivamente, por turnos. En cada turno cada ficha recorre un lado de un triángulo pequeño, de un extremo a otro.

2) Ninguna ficha puede recorrer un lado de un triángulo pequeño que ya esté pintado en rojo, pero puede descansar en un extremo pintado, incluso si ya hay otra ficha esperando allí su turno.

Demostrar que para todo entero $n > 0$ es posible pintar de rojo todos los lados de todos los triángulos pequeños.

**11 OIM 6.** Se tienen $n$ puntos distintos $A_1, A_2, \ldots, A_n$ en el plano, y a cada punto $A_i$ se ha asignado un número real $\lambda_i$ distinto de cero, de manera que

$$\overline{A_iA_j}^2 = \lambda_i + \lambda_j \quad \text{para todos los } i, j \text{ con } i \neq j.$$

Demostrar que

1) $n \leq 4$.

2) Si $n = 4$, entonces $\frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2} + \frac{1}{\lambda_3} + \frac{1}{\lambda_4} = 0$.

16 de Septiembre de 1997
Primera sesión: 4 h 30 min

**12 OIM 1.** Sea $r \geq 1$ un número real que cumple la siguiente propiedad:
*Para cada pareja de números enteros positivos $m$ y $n$, con $n$ múltiplo de $m$, se tiene que $[nr]$ es múltiplo de $[mr]$.*
Probar que $r$ es un número entero.
*Nota:* Si $x$ es un número real, denotamos por $[x]$ la parte entera de $x$.

**12 OIM 2.** Con centro en el incentro $I$ de un triángulo $ABC$ se traza una circunferencia que corta en dos puntos a cada uno de los tres lados del triángulo: al segmento $BC$ en $D$ y $P$ (siendo $D$ el más cercano a $B$); al segmento $CA$ en $E$ y $Q$ (siendo $E$ el más cercano a $C$); y al segmento $AB$ en $F$ y $R$ (siendo $F$ el más cercano a $A$).
Sea $S$ el punto de intersección de las diagonales del cuadrilátero $EQFR$. Sea $T$ el punto de intersección del cuadrilátero $FRDP$. Sea $U$ el punto de intersección de las diagonales del cuadrilátero $DPEQ$.
Demostrar que las circunferencias circunscritas a los triángulos $FRT$, $DPU$ y $EQS$ tienen un único punto común.

**12 OIM 3.** Sea $n \geq 2$ un número entero y $D_n$ el conjunto de los puntos $(x, y)$ del plano cuyas coordenadas son números enteros con $-n \leq x \leq n$ y $-n \leq y \leq n$.
1) Se dispone de tres colores; cada uno de los puntos de $D_n$ se colorea con uno de ellos. Demostrar que sin importar cómo se haya hecho esta coloración, siempre hay dos puntos de $D_n$ del mismo color tales que la recta que los contiene no pasa por ningún otro punto de $D_n$.
2) Encontrar la forma de colorear los puntos de $D_n$ utilizando cuatro colores de manera que si una recta contiene exactamente dos puntos de $D_n$, entonces esos dos puntos tienen colores distintos.

17 de Septiembre de 1997

Segunda sesión: 4 h 30 min

**12 OIM 4.** Sea $n$ un entero positivo. Consideremos la suma $x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n$, donde los valores que pueden tomar las variables $x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_n$ son únicamente 0 y 1. Sea $I(n)$ el número de $2n$-adas $(x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_n)$ para las cuales el valor de la suma es un número impar, y sea $P(n)$ el número de las $2n$-adas par las cuales dicha suma toma un valos par. Demostrar que

$$\frac{P(n)}{I(n)} = \frac{2^n + 1}{2^n - 1}.$$

**12 OIM 5.** En un triángulo acutángulo $ABC$, sean $AE$ y $BF$ dos alturas y sea $H$ el ortocentro. La recta simétrica de $AE$ respecto de la bisectriz (interior) del ángulo $A$, y la recta simétrica de $BF$ respecto de la bisectriz (interior) del ángulo $B$ se cortan en un punto $O$. Las rectas $AE$ y $AO$ cortan por segunda vez a la circunferencia circunscrita al triángulo $ABC$ en los puntos $M$ y $N$, respectivamente.
Sea $P$ la intersección de $BC$ con $HN$; $R$ la intersección de $BC$ con $OM$; y $S$ la intersección de $HR$ con $OP$.
Demostrar que $AHSO$ es un paralelogramo.

**12 OIM 6.** Sea $\mathcal{P} = \{P_1, P_2, \ldots, P_{1997}\}$ un conjunto de 1997 puntos en el interior de un círculo de radio 1, siendo $P_1$ el centro del círculo. Para cada $k = 1, 2, \ldots, 1997$, sea $x_k$ la distancia de $P_k$ al punto de $\mathcal{P}$ más próximo a $P_k$ y distinto de $P_k$. Demostrar que

$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_{1997}^2 \leq 9.$$

22 de Septiembre de 1998

Primera sesión: 4 h 30 min

**13 OIM 1.** Se dan 98 puntos sobre una circunferencia. María y José juegan alternativamente de la siguiente forma: cada uno de ellos traza un segmento uniendo dos de los puntos dados que no hayan sido unidos entre si anteriormente. El juego termina cuando los 98 puntos han sido usados como extremos de un segmento al menos una vez. El vencedor es la persona que dibuja el último trazo.
Si José inicia el juego, ¿quién puede asegurarse la victoria?

**13 OIM 2.** La circunferencia inscrita en el triángulo $ABC$ es tangente a los lados $BC$, $CA$ y $AB$ en los puntos $D$, $E$ y $F$, respectivamente. $AD$ corta la circunferencia en un segundo punto $Q$. Demostrar que la recta $EQ$ pasa por el punto medio de $AF$ si y solamente si, $AC = BC$.

**13 OIM 3.** Hallar el mínimo número natural $n$ con la siguiente propiedad: entre cualesquiera $n$ números distintos, pertenecientes al conjunto $\{1, 2, \ldots, 999\}$ se puede elegir cuatro números diferentes $a$, $b$, $c$, $d$, tales que $a + 2b + 3c = d$.

22 de Septiembre de 1998

Segunda sesión: 4 h 30 min

**13 OIM 4.** Alrededor de una mesa redonda están sentados representantes de $n$ países $(n \geq 2)$, de modo que satisfacen la siguiente condición: si dos personas son del mismo país, entonces sus respectivos vecinos de la derecha no pueden ser de un mismo país. Determinar, para cada $n$, el número máximo de personas que puede haber alrededor de la mesa.

**13 OIM 5.** Hallar el máximo valor posible de $n$ para que existan puntos distintos $P_1$, $P_2, \ldots, P_n$ en el plano, y números reales $r_1, r_2, \ldots, r_n$, de modo que la distancia entre cualesquiera dos puntos diferentes $P_i$ y $P_j$ sea $r_i + r_j$.

**13 OIM 6.** Sea $\lambda$ la raíz positiva de la ecuación $t^2 - 1998t - 1 = 0$. Se define la sucesión $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ por

$$x_0 = 1$$
$$x_{n+1} = [\lambda x_n], \quad \text{para} \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Hallar el resto de la división de $x_{1998}$ por 1998.

*Nota:* Los corchetes indican parte entera.

14 de Septiembre de 1999
Primera sesión: 4 h 30 min

**14 OIM 1.** Hallar todos los enteros positivos que son menores que 1000 y cumplen con la siguiente condición: el cubo de la suma de sus dígitos es igual a cuadrado de dicho entero.

**14 OIM 2.** Dadas dos circunferencias $M$ y $N$, decimos que $M$ biseca a $N$ si la cuerda común es un diámetro de $N$. Considérense dos circunferencias fijas $C_1$ y $C_2$ no concéntricas.
1) Probar que existen infinitas circunferencias $B$ tales que $B$ biseca a $C_1$ y $B$ biseca a $C_2$.
2) Determinar el lugar geométrico de los centros de las circunferencias $B$.

**14 OIM 3.** Sean $n$ puntos distintos $P_1$, $P_2$, $\ldots$, $P_n$, sobre una recta del plano ($n \geq 2$). Se consideran las circunferencias de diámetro $P_iP_j$, ($1 \leq i < j \leq n$) y coloreamos cada circunferencia con uno de $k$ colores dados. Llamamos $(n, k)$-nube a esta configuración.
Para cada entero positivo $k$, determinar todos los $n$ para los cuales se cumple que toda $(n, k)$-nube contiene dos circunferencias tangentes exteriormente del mismo color.
*Nota:* Para evitar ambigüedades, los puntos que pertenecen a más de una circunferencia no llevan color.

15 de Septiembre de 1999

Segunda sesión: 4 h 30 min

**14 OIM 4.** Sea $B$ un entero mayor que 10 tal que cada uno de sus dígitos pertenece al conjunto $\{1, 3, 7, 9\}$. Demostrar que $B$ tiene un factor primo mayor o igual que 11.

**14 OIM 5.** Un triángulo acutángulo $ABC$ está inscrito en una circunferencia de centro $O$. Las alturas del triángulo son $AD$, $BE$ y $CF$. La recta $EF$ corta a la circunferencia en $P$ y $Q$.

1) Probar que $OA$ es perpendicular a $PQ$.

2) Si $M$ es el punto medio de $BC$, probar que $\overline{AP}^2 = 2\,\overline{AD}\,\overline{OM}$.

**14 OIM 6.** Sean $A$ y $B$ puntos del plano y $C$ un punto de la mediatriz de $AB$. Se construye una sucesión $C_1$, $C_2$, ..., $C_n$ ... de la siguiente manera:

$C_1 = C$ y para $n \geq 1$, si $C_n$ no pertenece al segmento $AB$, $C_{n+1}$ es el circuncentro del triángulo $ABC_n$.

Determinar todos los puntos $C$ tales que la sucesión $C_1$, $C_2$, ..., $C_n$ ... está definida para todo $n$ y es periódica a partir de un cierto punto.

*Nota:* Una sucesión $C_1$, $C_2$, ..., $C_n$ ... es periódica a partir de un cierto punto si existen enteros positivos $k$ y $p$ tales que $C_{n+p} = C_n$ para todo $n \geq k$.

2000 — XV Olimpiada Iberoamericana de Matemáticas — 15

Caracas, Venezuela

20 de Septiembre de 2000

Primera sesión: 4 h 30 min

**15 OIM 1.** Se construye un polígono regular de $n$ lados ($n \geq 3$) y se numeran sus vértices de 1 a $n$. Se trazan todas las diagonales del polígono. Demostrar que si $n$ es impar, se puede asignar a cada lado y a cada diagonal un número entero de 1 a $n$, tal que se cumplan simultáneamente las siguientes condiciones:

1) El número asignado a cada lado o diagonal sea distinto a los asignados a los vértices que une.

2) Para cada vértice, todos los lados y diagonales que comparten dicho vértice tengan números diferentes.

**15 OIM 2.** Sean $S_1$ y $S_2$ dos circunferencias, de centros $O_1$ y $O_2$ respectivamente, secantes en $M$ y $N$. La recta $t$ es la tangente común a $S_1$ y $S_2$, más cercana a $M$. Los puntos $A$ y $B$ son los respectivos puntos de contacto de $t$ con $S_1$ y $S_2$, $C$ el punto diametralmente opuesto a $B$ y $D$ el punto de intersección de la recta $O_1O_2$ con la recta perpendicular a la recta $AM$ trazada por $B$. Demostrar que $M$, $D$ y $C$ están alineados.

**15 OIM 3.** Encontrar todas las soluciones de la ecuación

$$(x+1)^y - x^z = 1$$

para $x$, $y$, $z$ enteros mayores que 1.

# 2000 XV Olimpiada Iberoamericana de Matemáticas 15

Caracas, Venezuela

21 de Septiembre de 2000

Segunda sesión: 4 h 30 min

**15 OIM 4.** De una progresión aritmética infinita $1,\ a_1,\ a_2, \ldots$ de números reales se eliminan términos, obteniéndose una progresión geométrica infinita $1,\ b_1,\ b_2, \ldots,$ de razón $q$. Encontrar los posibles valores de $q$.

**15 OIM 5.** Hay un montón de 2000 piedras. Dos jugadores se turnan para retirar piedras, alternadamente, de acuerdo con las siguientes reglas:

1) En cada jugada se pueden retirar 1, 2, 3, 4, o 5 piedras del montón.

2) En cada jugada se prohibe que el jugador retire la misma cantidad de piedras que retiró su oponente en la jugada previa.

Pierde el jugador que en su turno no pueda realizar una jugada válida. Determinar cuál jugador tiene estrategia ganadora y encontrarla.

**15 OIM 6.** Un hexágono convexo se denomina *bonito* si tiene cuatro diagonales de longitud 1, cuyos extremos incluyen todos los vértices del hexágono.

1) Dado cualquier número $k$, mayor que 0 y menor que 1, encontrar un hexágono bonito de área $k$.

2) Demostrar que el área de cualquier hexágono bonito es menor que $3/2$.

25 de Septiembre de 2001
Primera sesión: 4 h 30 min

**16 OIM 1.** Decimos que un número natural $n$ es *charrúa* si satisface simultáneamente las siguientes condiciones:
1) Todos los dígitos de $n$ son mayores que 1.
2) Siempre que se multipliquen cuatro dígitos de $n$, se obtiene un divisor de $n$.
Demostrar que para cada número natural $k$ existe un número charrúa con más de $k$ dígitos.

**16 OIM 2.** La circunferencia inscrita en el triángulo $ABC$ tiene centro $O$ y es tangente a los lados $BC$, $AC$ y $AB$ en los puntos $X$, $Y$ y $Z$, respectivamente. Las rectas $BO$ y $CO$ cortan a la recta $YZ$ en los puntos $P$ y $Q$, respectivamente.
Demostrar que si los segmentos $XP$ y $XQ$ tienen la misma longitud, entonces el triángulo $ABC$ es isósceles.

**16 OIM 3.** Sea $S$ un conjunto de $n$ elementos y $S_1$, $S_2$, ..., $S_k$ subconjuntos de $S$, ($k \geq 2$), tales que cada uno de ellos tiene por lo menos $r$ elementos.
Demostrar que existen $i$ y $j$, con $1 \leq i < j \leq k$ tales que la cantidad de elementos comunes de $S_i$ y $S_j$ es mayor o igual que

$$r - \frac{nk}{4(k-1)}.$$

26 de Septiembre de 2001

Segunda sesión: 4 h 30 min

**16 OIM 4.** Determinar el número máximo de progresiones aritméticas crecientes de tres términos que puede tener una sucesión $a_1 < a_2 < \cdots < a_n$ de $n > 3$ números reales.

**16 OIM 5.** En un tablero de $2000 \times 2001$ las casillas tienen coordenadas $(x, y)$ con $x$, $y$ enteros, $0 \leq x \leq 1999$, $0 \leq y \leq 2000$. Una nave en el tablero se mueve la siguiente manera: antes de cada movimiento, la nave está en posición $(x, y)$ y tiene una velocidad $(h, v)$ donde $h$ y $v$ son enteros. La nave escoge una nueva velocidad $(h', v')$ de forma que $h' - h$ sea igual a $-1$, $0$ o $1$; y $v' - v$ sea igual a $-1$, $0$ o $1$. La nueva posición de la nave será $(x', y')$, donde $x'$ es el resto de dividir $x + h'$ por 2000, e $y'$ es el resto de dividir $y + v'$ por 2001.

Hay dos naves en el tablero: la marciana y la terrestre, que quiere atrapar a la marciana. Inicialmente, cada nave está en una casilla del tablero y tiene velocidad $(0, 0)$. Primero se mueve la nave terrestre y continúan moviéndose alternadamente.

¿Existe una estrategia que siempre le permita a la nave terrestre atrapar a la nave marciana, cualesquiera que sean las posiciones iniciales?

*Nota:* La nave terrestre, que siempre ve a la marciana, atrapa a la marciana si después de un movimiento suyo cae en la misma posición de la marciana.

**16 OIM 6.** Demostrar que es imposible cubrir un cuadrado de lado 1 con cinco cuadrados iguales de lado menor que $1/2$.

29 de Septiembre de 2002

Primera sesión: 4 h 30 min

**17 OIM 1.** Los números enteros del 1 al 2002, ambos inclusive, se escriben en una pizarra en orden creciente $1, 2, \ldots, 2002$. Luego se borran los que ocupan el primer lugar, cuarto lugar, séptimo lugar, etc., es decir, los que ocupan los lugares de la forma $3k+1$.

En la nueva lista, se borran los números que ocupan los lugares de la forma $3k+1$.

Se repite este proceso hasta que se borran todos los números de la lista. ¿Cuál fue el último número que se borró?

**17 OIM 2.** Dado cualquier conjunto de 9 puntos en el plano, de los cuales no hay 3 colineales, demuestre que para cada punto $P$ del conjunto, el número de triángulos que tienen como vértices a tres de los ocho puntos restantes y a $P$ en su interior, es par.

**17 OIM 3.** Un punto $P$ es interior al triángulo equilátero $ABC$ tal que $\widehat{APC} = 120^\circ$. Sean $M$ la intersección de $CP$ con $AB$ y $N$ la intersección de $CP$ con $BC$. Hallar el lugar geométrico del circuncentro del triángulo $MBN$ al variar $P$.

30 de Septiembre de 2002
Segunda sesión: 4 h 30 min

**17 OIM 4.** En un triángulo escaleno $ABC$ se traza la bisectriz interior $BD$, con $D$ sobre $AC$. Sean $E$ y $F$, respectivamente, los pies de las perpendiculares trazadas desde $A$ y $C$ hacia la recta $BD$, y $M$ el punto sobre el lado $BC$ tal que $DM$ es perpendicular a $BC$. Demuestre que $\widehat{EMD} = \widehat{DMF}$.

**17 OIM 5.** La sucesión de números reales $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ se define como

$$a_1 = 56 \text{ y } \quad a_{n+1} = a_n - \frac{1}{a_n}$$

para cada entero $n \geq 1$. Demuestre que existe un número entero $k$, $1 \leq k \leq 2002$, tal que $a_k < 0$.

**17 OIM 6.** Un policía intenta capturar a un ladrón en un tablero $2001 \times 2001$. Ellos juegan alternadamente. Cada jugador, en su turno, debe moverse una casilla en uno de los tres siguientes sentidos:

$\downarrow$ (abajo); $\quad \rightarrow$ (derecha); $\quad \nwarrow$ (diagonal superior izquierda).

Si el policía se encuentra en la casilla de la esquina inferior derecha, puede usar su jugada para pasar directamente a la casilla de la esquina superior izquierda (el ladrón no puede hacer esta jugada). Inicialmente el policía está en la casilla central y el ladrón está en la casilla vecina diagonal superior derecha al policía. El policía comienza el juego. Demuestre que

a) El ladrón consigue moverse por lo menos 10000 veces sin ser capturado.

b) El policía posee una estrategia para capturar al ladrón.

*Nota:* El policía captura al ladrón cuando entra en la casilla en la que está el ladrón. Si el ladrón entra en la casilla del policía, no se produce captura.

# 2003 XVIII Olimpiada Iberoamericana de Matemáticas 18

Mar del Plata, Argentina

26 de Septiembre de 2003

Primera sesión: 4 h 30 min

**18 OIM 1.** a) Se tienen dos sucesiones, cada una de 2003 enteros consecutivos, y un tablero de 2 filas y 2003 columnas.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | | . . . . . . | | |
| | | | . . . . . . | | |

Decida si siempre es posible distribuir los números de la primera sucesión en la primera fila y los de la segunda sucesión en la segunda fila, de tal manera que los resultados obtenidos al sumar los dos números de cada columna formen una nueva sucesión de 2003 números consecutivos.

b) ¿Y si se reemplaza 2003 por 2004?

Tanto en (a) como en (b), si la respuesta es afirmativa, explique cómo distribuiría los números, y si es negativa, justifique el porqué.

**18 OIM 2.** Sean $C$ y $D$ dos puntos de la semicircunferencia de diámetro $AB$ tales que $B$ y $C$ están en semiplanos distintos respecto de la recta $AD$. Denotemos por $M$, $N$ y $P$ los puntos medios de $AC$, $DB$ y $CD$, respectivamente. Sean $O_A$ y $O_B$ los circuncentros de los triángulos $ACP$ y $BDP$. Demuestre que las rectas $O_AO_B$ y $MN$ son paralelas.

**18 OIM 3.** Pablo estaba copiando el siguiente problema: *Considere todas las sucesiones de 2004 números reales* $(x_0, x_1, x_2, \dots, x_{2003})$ *tales que*

$$\begin{gathered} x_0 = 1 \\ 0 \le x_1 \le 2x_0 \\ 0 \le x_2 \le 2x_1 \\ \dots\dots \\ 0 \le x_{2003} \le x_{2002}. \end{gathered}$$

*Entre todas estas sucesiones, determinar aquella para la cual la siguiente expresión toma su mayor valor:* $S = \cdots$. Cuando Pablo iba a copiar la expresión de $S$ le borraron la pizarra. Lo único que pudo recordar es que $S$ era de la forma

$$S = \pm x_1 \pm x_2 \pm \cdots \pm x_{2002} + x_{2003},$$

donde el último término, $x_{2003}$, tenía coeficiente $+1$, y los anteriores tenían coeficiente $+1$ o $-1$. Demuestre que Pablo, a pesar de no tener el enunciado completo, puede determinar con certeza la solución del problema.

17 de Septiembre de 2003

Segunda sesión: 4 h 30 min

**18 OIM 4.** Sea $M = \{1, 2, \ldots, 49\}$ el conjunto de los primeros 49 enteros positivos. Determine el máximo entero $k$ tal que el conjunto $M$ tiene un subconjunto de $k$ elementos en el que no hay 6 números consecutivos. Para este valor máximo de $k$, halle la cantidad de subconjuntos de $M$, de $k$ elementos, que tienen la propiedad mencionada.

**18 OIM 5.** En el cuadrado $ABCD$, sean $P$ y $Q$ puntos pertenecientes a los lados $BC$ y $CD$ respectivamente, distintos de los extremos, tales que $BP = CQ$. Se consideran puntos $X$ e $Y$, $X \neq Y$, pertenecientes a los segmentos $AP$ y $BQ$, respectivamente. Demuestre que, cualesquiera que sean $X$ e $Y$, existe un triángulo cuyos lados tienen las longitudes de $BX$, $XY$ y $DY$.

**18 OIM 6.** Se definen las sucesiones $\left(a_n\right)_{n\geq 0}$, $\left(b_n\right)_{n\geq 0}$ por:

$$a_0 = 1, \quad b_0 = 4 \quad \text{y}$$
$$a_{n+1} = a_n^{2001} + b_n, \quad b_{n+1} = b_n^{2001} + a_n \quad \text{para } n \geq 0.$$

Demuestre que 2003 no divide a ninguno de los términos de estas sucesiones.

**EUGENIO J. MIRANDA PALACIOS**

Archidona, Málaga

**Olimpiada I, Primer premio**

# ALBERTO DE LA TORRE

Madrid

**Olimpiada I, Segundo premio**

## ANTONI OLIVA CUYÀS

Barcelona

**Olimpiada 1, Tercer premio**

# LUIS PUIG ESPINOSA

Valencia

**Olimpiada II, Primer premio**

**JAIME VINUESA TEJEDOR**

Soria

**Olimpiada II, Segundo premio**

**ANDRÉS MÉNDEZ RUTLLÁN**

Madrid

**Olimpiada II, Tercer premio**

**JOSÉ L. RUBIO DE FRANCIA**

Zaragoza

**Olimpiada III, Primer premio**

# MANUEL GAMELLA BACETE

Madrid

**Olimpiada III, Segundo premio**

# BERNARDO LÓPEZ MELERO

Madrid

**Olimpiada IV, Primer premio**

# ARTURO FRAILE PÉREZ

Barcelona

**Olimpiada IV, Segundo premio**

**JULIO FALIVENE RABOSO**

Barcelona

**Olimpiada IV, Tercer premio**

**FRANCISCO J. VIVES ARUMÍ**

Barcelona

**Olimpiada V, Primer premio**

# ROBERTO MORIYÓN SALOMÓN

Madrid

**Olimpiada V, Tercer premio**

# CARLOS A. LUCIO FERNÁNDEZ

Portugalete, Vizcaya

**Olimpiada V, Tercer premio**

# JAUME LLUÍS GARCÍA ROIG

Barcelona

**Olimpiada VI, Primer premio**

# DOLORES CARRILLO GALLEGO

Murcia

**Olimpiada VI, Segundo premio**

# JORGE BUSTOS PUCHE

Madrid

**Olimpiada VI, Tercer premio**

# ENRIQUE RODRÍGUEZ BONO

Albacete

**Olimpiada VII, Primer premio**

# FRANCISCO J. CORELLA MONZÓN

Madrid

**Olimpiada VII, Segundo premio**

# IGNACIO ALEGRE DE MIGUEL

Barcelona

**Olimpiada VII, Tercer premio**

# M. ISABEL CORELLA MONZÓN

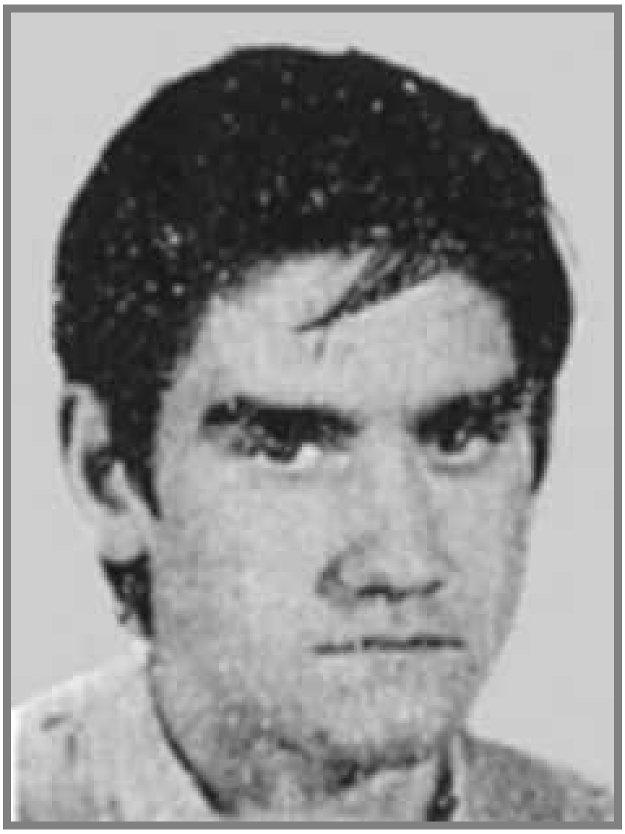
Madrid

**Olimpiada VIII, Primer premio**

## VICENTE FRANCÉS TORTOSA

Xátiva, Valencia

**Olimpiada VIII, Segundo premio**



## JOSÉ M. GIL MARTÍNEZ

Soria

**Olimpiada VIII, Tercer premio**

**JOSEP GELONCH ANYÉ**

Lleida

**Olimpiada IX, Primer premio**

# JOSÉ I. QUEROL BRAVO

Zaragoza

**Olimpiada IX, Segundo premio**

# JOSÉ BONET SOLVES

Valencia

**Olimpiada IX, Tercer premio**

# ANTONIO GARCÍA FERNÁNDEZ

Alicante

**Olimpiada X, Primer premio**

# MIGUEL CASTAÑO GRACIA

Madrid

**Olimpiada X, Segundo premio**

# ENRIQUE FRAU PICÓ

Palma de Mallorca

**Olimpiada X, Tercer premio**

**JUAN M. SUEIRO BAL**

Vilafranca del Penedès, Barcelona

**Olimpiada XI, Primer premio**

# JESÚS ALCÁZAR MORENO

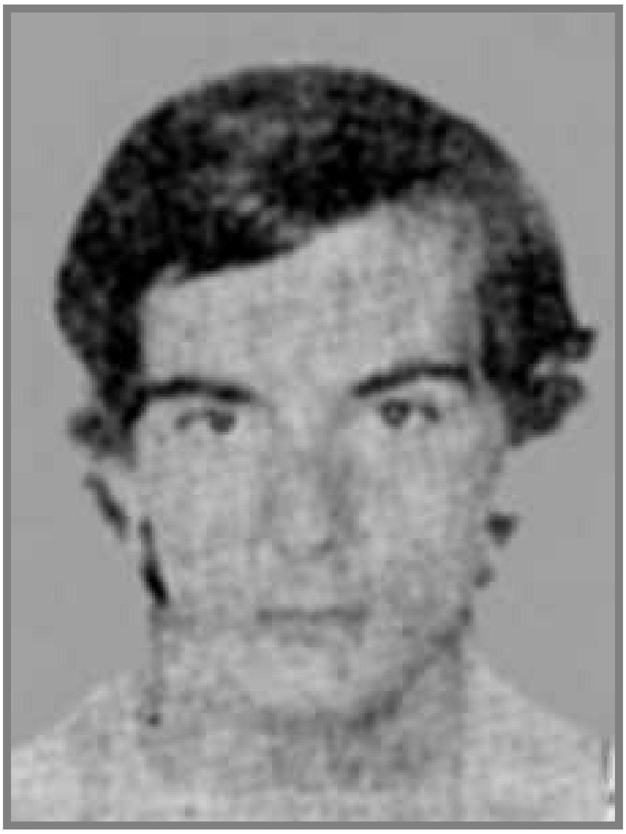
Zaragoza

**Olimpiada XI, Segundo premio**

**LUIS NARVÁEZ MACARRO**

Huelva

**Olimpiada XI, Tercer premio**



# AGUSTÍN LLERENA ANCHUTEGUI

Madrid

**Olimpiada XII, Primer premio**

## FEDERICO CUCO PARDILLOS

Xátiva, Valencia

**Olimpiada XII, Segundo premio**

# ENRIQUE UZABAL AMORES

Salamanca

**Olimpiada XII, Tercer premio**

# SERAFÍN MORAL CALLEJÓN

Dalias, Almería

**Olimpiada XIII, Primer premio**

# ANTONIO J. RODRÍGUEZ DE LA CRUZ

Sevilla

**Olimpiada XIII, Segundo premio**

**ANTONIO BARREIRO BLAS**

Vigo, Pontevedra

**Olimpiada XIII, Tercer premio**

# ALBERTO ELDUQUE PALOMO

Zaragoza

**Olimpiada XIV, Primer premio**

# FRANCISCO J. PALMA MOLINA

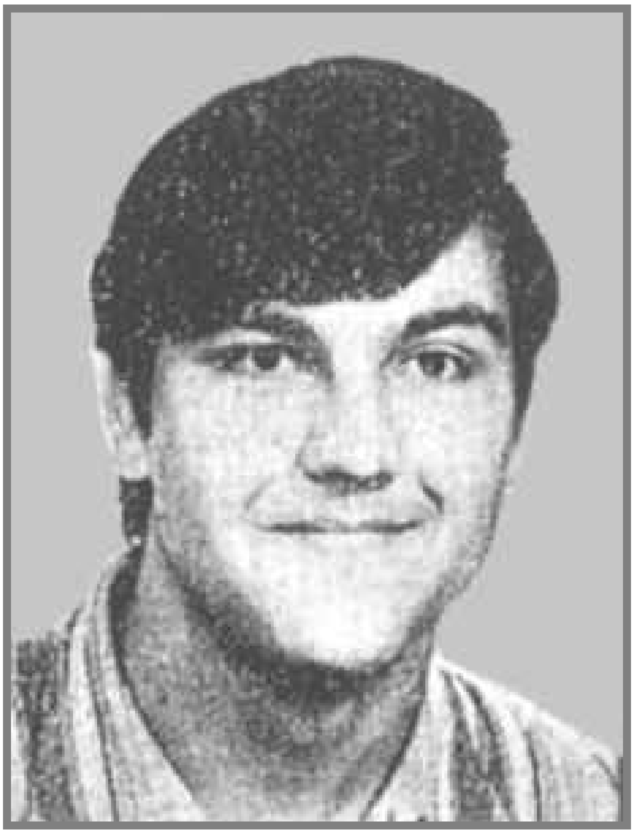
Málaga

**Olimpiada XIV, Segundo premio**

# JOSÉ PEÑA GAMARRA

Madrid

**Olimpiada XIV, Tercer premio**



**CARLES CASACUBERTA VERGÉS**

Olot, Girona

**Olimpiada XV, Primer premio**

**JESÚS NIEVAS ESPUELA**

Zaragoza

**Olimpiada XV, Segundo premio**

**JORGE MAS TRULLENQUE**

Barcelona

**Olimpiada XV, Tercer premio**

# GUILLERMO ROZAS RODRÍGUEZ

Madrid

**Olimpiada XVI, Primer premio**

**PEDRO CARRIÓN RODRÍGUEZ DE GUZMÁN**

Murcia

**Olimpiada XVI, Segundo premio**

# JOSÉ FERNANDO LÓPEZ BLÁZQUEZ

Sevilla

**Olimpiada XVI, Tercer premio**

# PABLO ÁLVAREZ ROYO-VILLANOVA

Madrid

**Olimpiada XVII, Primer premio**

**FERNANDO BARBERO GONZÁLEZ**

Segovia

**Olimpiada XVII, Segundo premio**

**FERNANDO ETAYO GORDEJUELA**

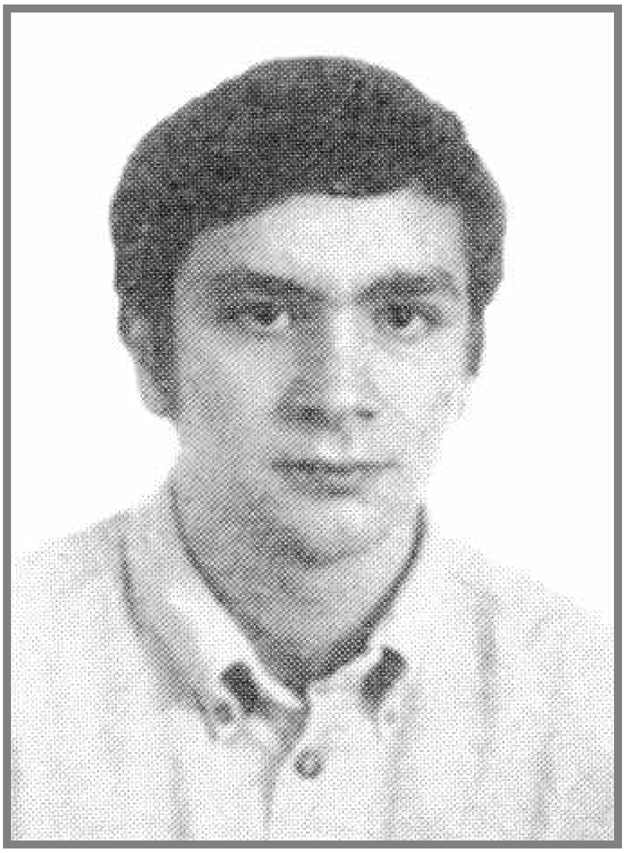
Madrid

**Olimpiada XVII, Tercer premio**

# VICENTE MUÑOZ VELÁZQUEZ

Madrid

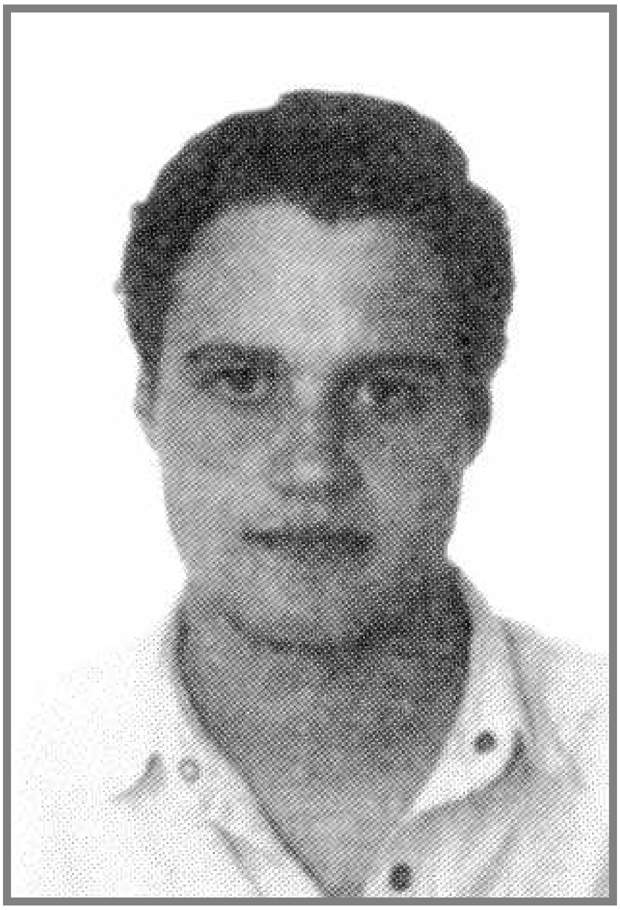
**Olimpiada XXV, Primer premio**



**ÁNGEL PAREDES GALÁN**

Santiago de Compostela

**Olimpiada XXXI, Primer premio**

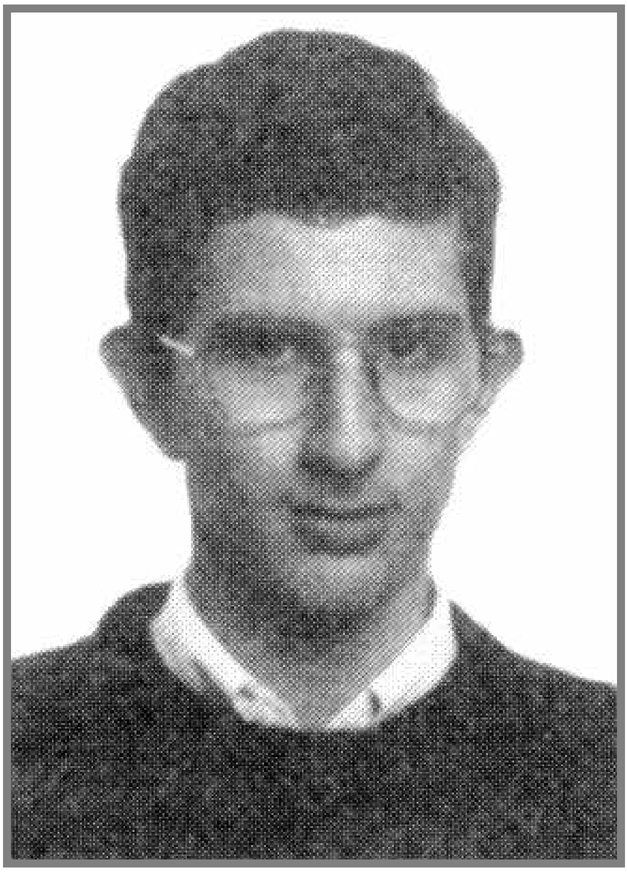


**JERÓNIMO ARENAS GARCÍA**

Sevilla

**Olimpiada XXX, Quinto premio**

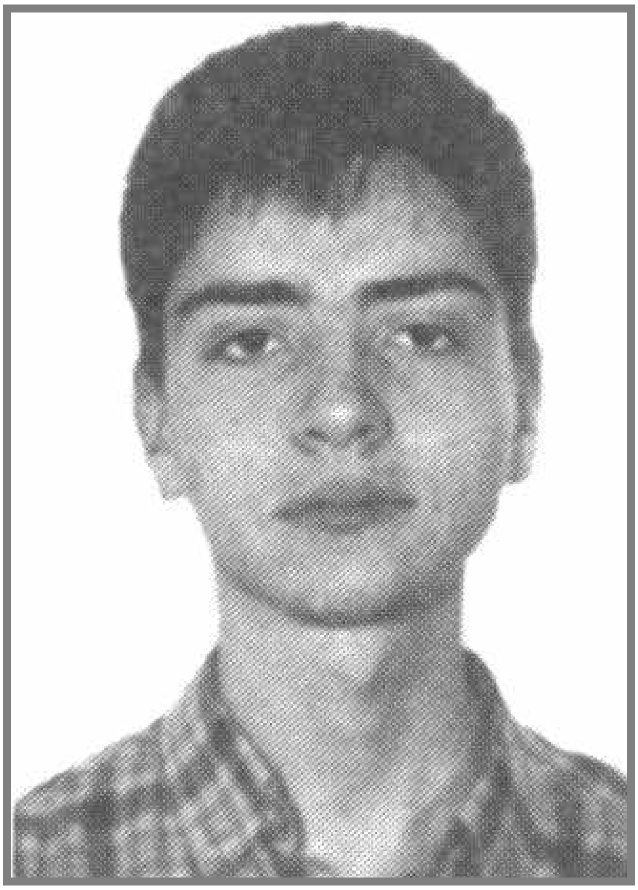
**Olimpiada XXXI, Segundo premio**



**LUIS FABIANI BENDICHO**

Zaragoza

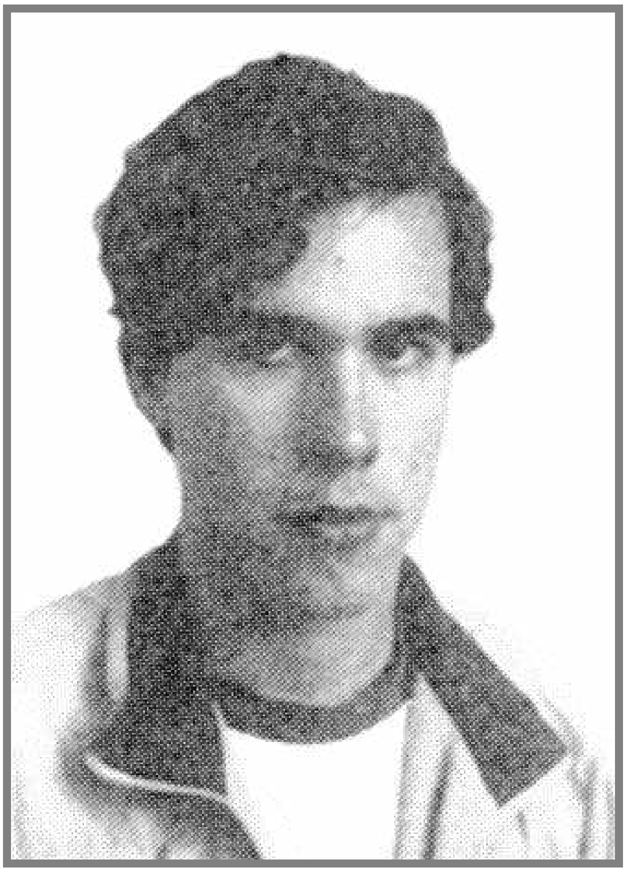
**Olimpiada XXXI, Tercer premio**



**JAUME ANDREU PASCUAL**

Baleares

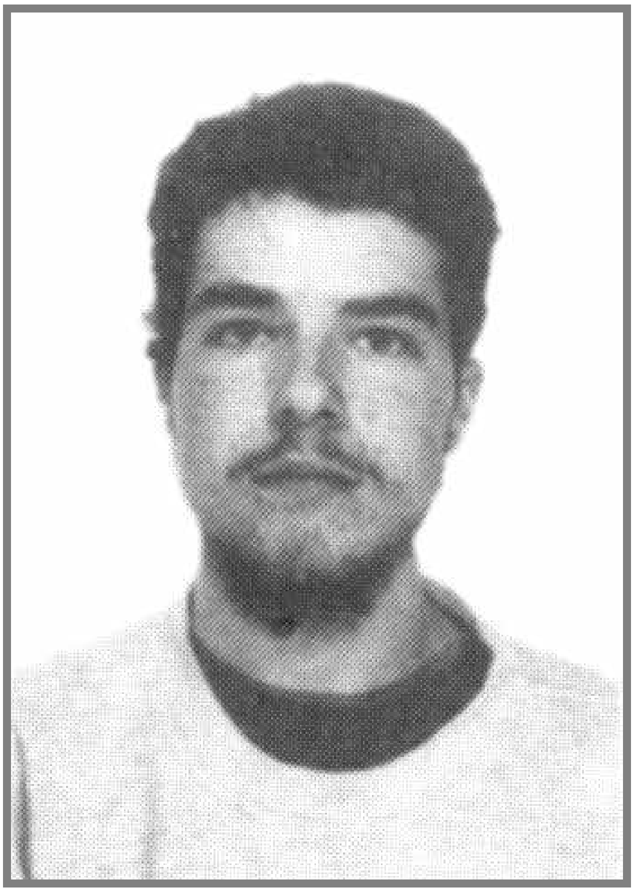
**Olimpiada XXXI, Cuarto premio**



**ALEJANDRO GARCÍA GIL**

Madrid

**Olimpiada XXXI, Quinto premio**



## IGNACIO FERNÁNDEZ GALVÁN

Extremadura

**Olimpiada XXXI, Sexto premio**

**SERGI ELIZALDE TORRENT**

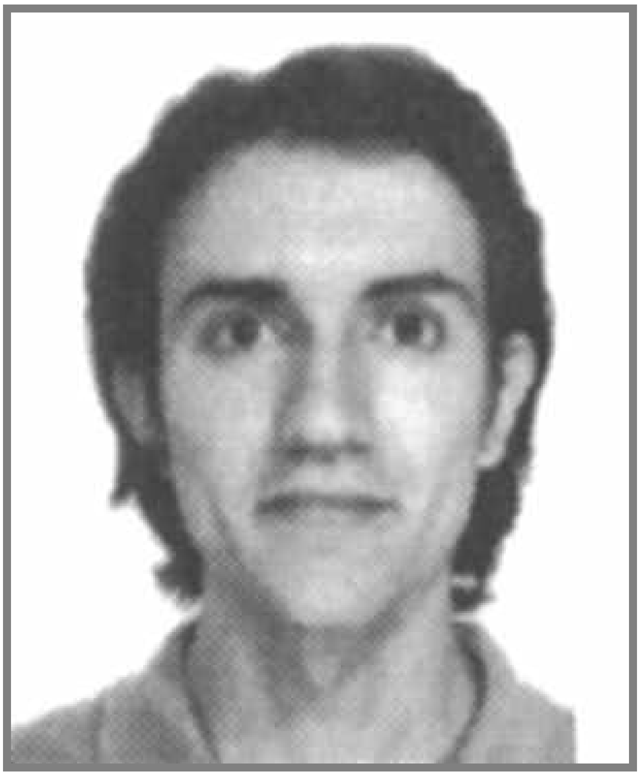
Barcelona

**Olimpiada XXXII, Primer premio**

# TOMÁS PALACIOS GUTIÉRREZ

Madrid

**Olimpiada XXXII, Segundo premio**



## FERNANDO RAMBLA BLANCO

Cádiz

**Olimpiada XXXII, Tercer premio**

# ANTONIO JARA DE LAS HERAS

Jaén

**Olimpiada XXXII, Cuarto premio**

# PATRICIA SEBASTIÁN CELORRIO

Zaragoza

**Olimpiada XXXII, Quinto premio**

**VÍCTOR MARTÍNEZ DE ALBÉNIZ MARGALEF**

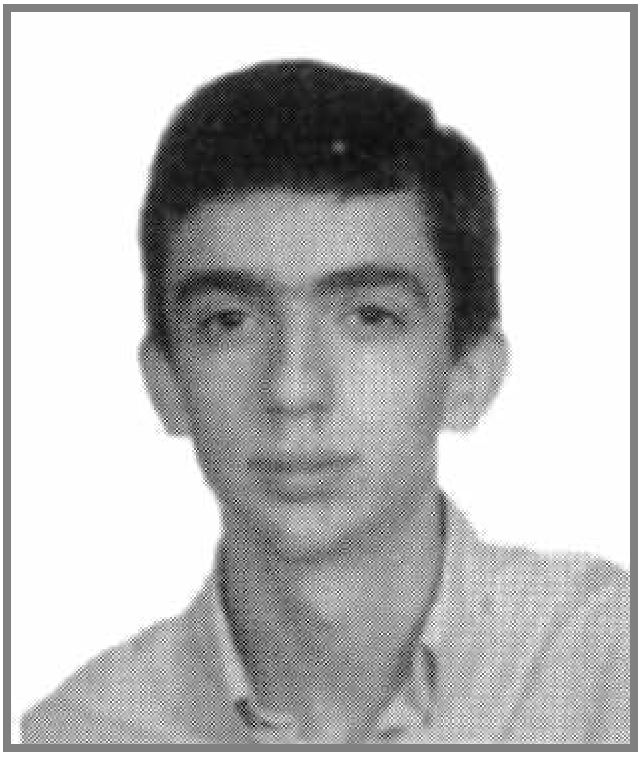
Barcelona

**Olimpiada XXXII, Sexto premio**

**ANATOLI SEGURA VÉLEZ**

Baza, Granada

**Olimpiada XXXIII, Primer premio**



# MIGUEL LOBO LÓPEZ

Martos, Jaén

**Olimpiada XXXIII, Segundo premio**

# MARIO ANDRÉS MONTES GARCÍA

Salamanca

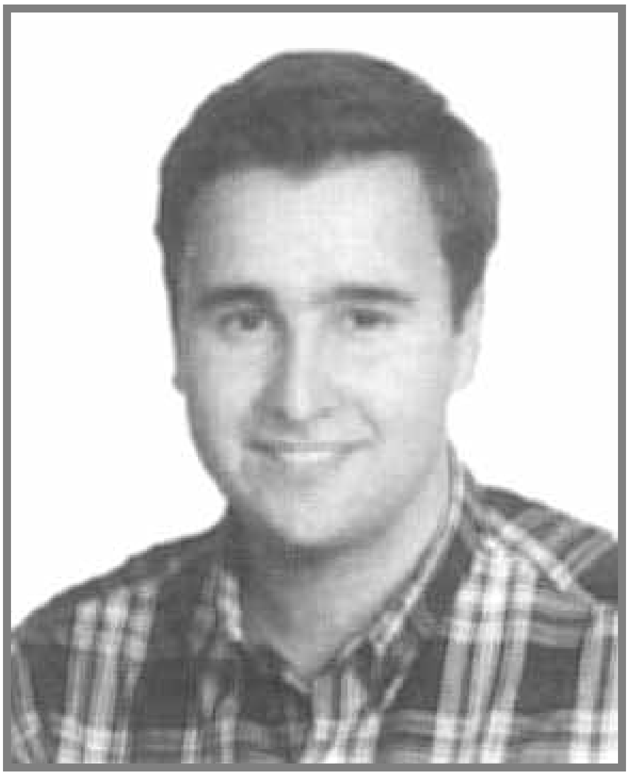
**Olimpiada XXXIII, Tercer premio**

**Olimpiada XXXIV, Primer premio**

**MAX BERNSTEIN OBIOLS**

Barcelona

**Olimpiada XXXIII, Cuarto premio**



# JOSEBA VILLATE BEJARANO

Algorta, Vizcaya

**Olimpiada XXXIII, Quinto premio**

**XAVIER PÉREZ JIMÉNEZ**

Barcelona

**Olimpiada XXXIII, Sexto premio**

**RAMÓN JOSÉ ALIAGA VAREA**

Mislata, Valencia

**Olimpiada XXXIV, Segundo premio**

**Olimpiada XXXV, Primer premio**

**DAVID MARTÍN CLAVO**

Zaragoza

**Olimpiada XXXIV, Tercer premio**

**MARÍA PE PEREIRA**

Burgos

**Olimpiada XXXIV, Cuarto premio**

**BEATRIZ SANZ MERINO**

Madrid

**Olimpiada XXXIV, Quinto premio**

**JAIME VINUESA DEL RIO**

Valladolid

**Olimpiada XXXIV, Sexto premio**

# ANDRÉS TALLOS TANARRO

Madrid

**Olimpiada XXXV, Segundo premio**


**ENRIQUE VALLEJO GUTIÉRREZ**

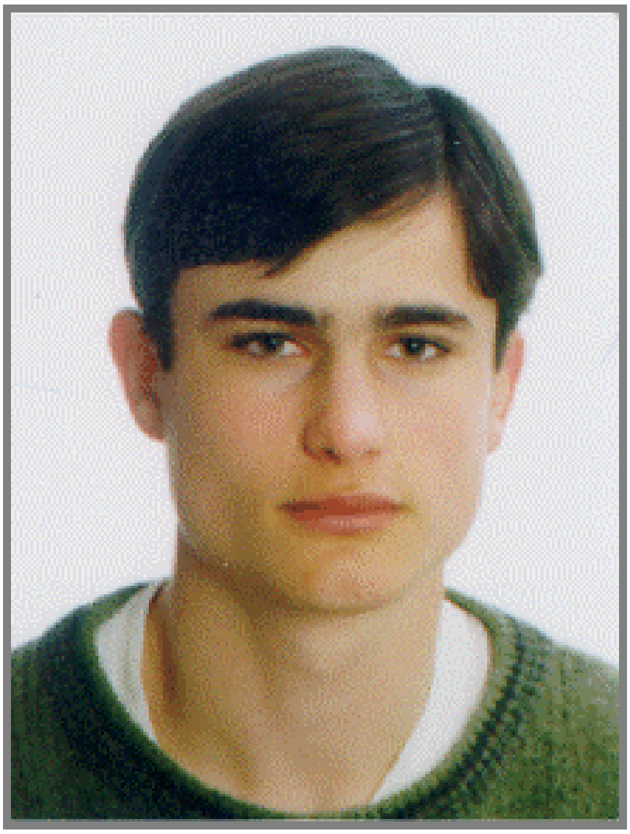
Bilbao

**Olimpiada XXXV, Tercer premio**

# ÁLVARO NAVARRO TOVAR

Madrid

**Olimpiada XXXV, Cuarto premio**



**JAVIER MÚGICA DE RIBERA**

A Coruña

**Olimpiada XXXV, Quinto premio**

**NÉSTOR SANCHO BEJARANO**

Béjar, Salamanca

**Olimpiada XXXV, Sexto premio**

**CARLOS GÓMEZ RODRÍGUEZ**

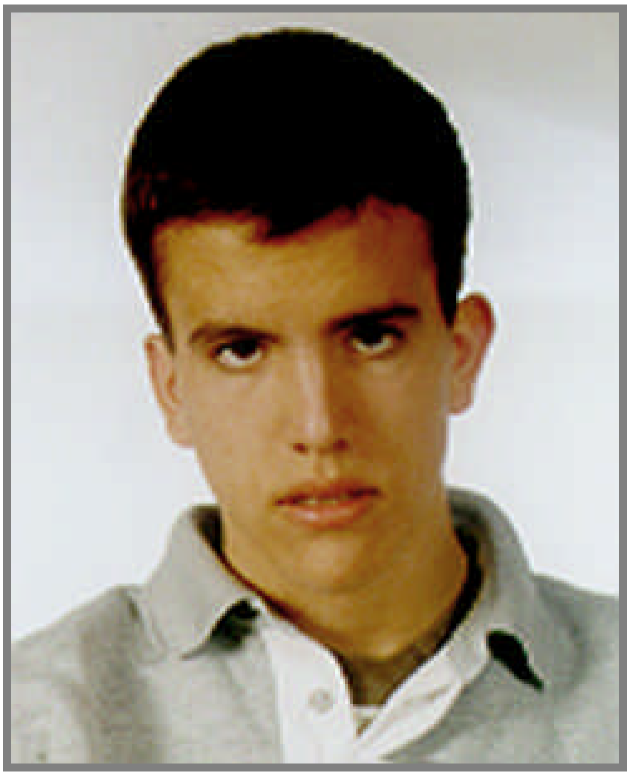
Santiago de Compostela

**Olimpiada XXXVI, Primer premio**

# LUIS EMILIO GARCÍA RODRÍGUEZ

Valencia

**Olimpiada XXXVI, Segundo premio**



# ALBERTO SUÁREZ REAL

Salinas, Asturias

**Olimpiada XXXVI, Tercer premio**

# JOSÉ MARÍA CANTARERO LÓPEZ

Ronda, Málaga

**Olimpiada XXXVI, Cuarto premio**

**MANUEL PÉREZ MOLINA**

Alicante

**Olimpiada XXXVI, Quinto premio**

**ROBERTO RUBIO NÚÑEZ**

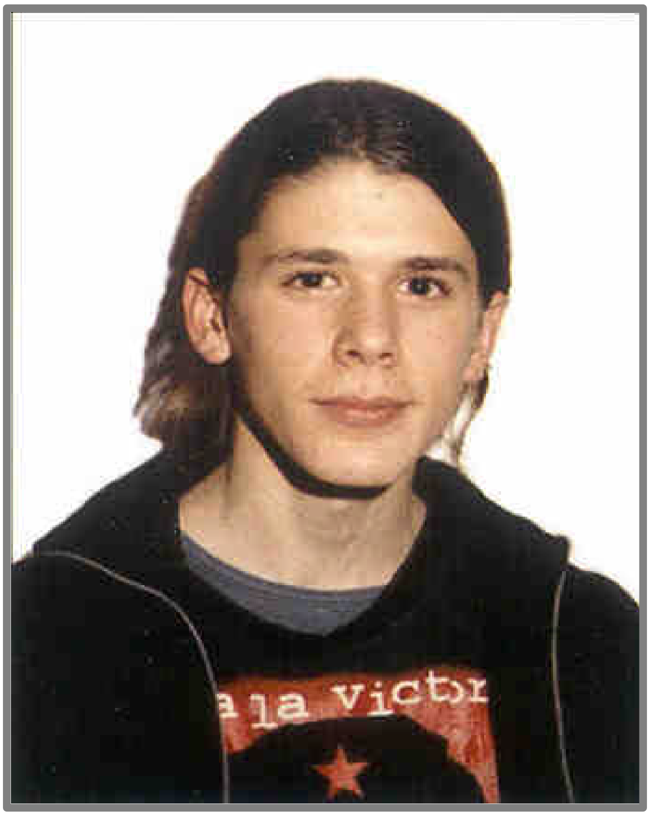
Valencia

**Olimpiada XXXVI, Sexto premio**

**JAVIER CÓPPOLA RODRÍGUEZ**

Madrid

**Olimpiada XXXVII, Primer premio**



**MARTÍ PRATS SOLER**

Barcelona

**Olimpiada XXXVII, Segundo premio**

## LUIS HERNÁNDEZ CORBATO

Madrid

**Olimpiada XXXVII, Tercer premio**

**Olimpiada XXXVIII, Segundo premio**

**Olimpiada XXXIX, Segundo premio**

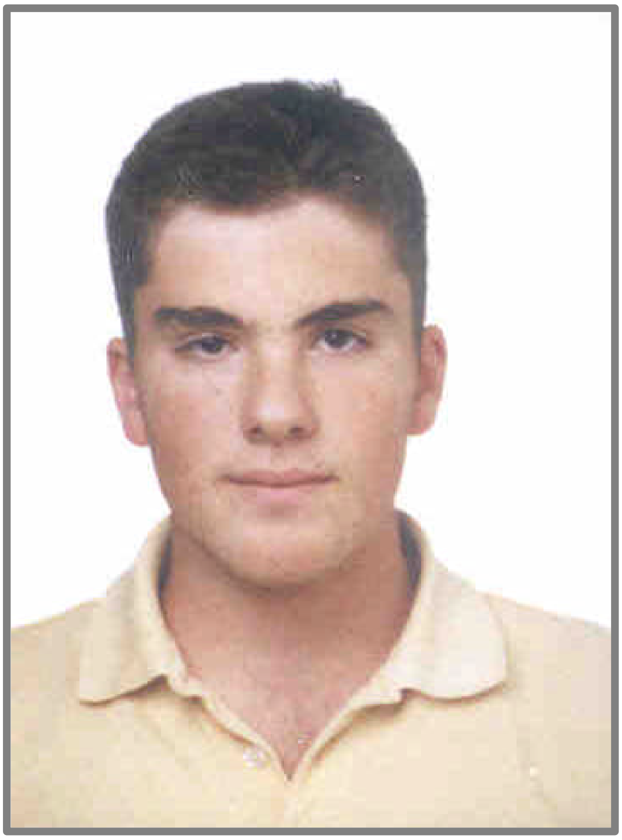
**Insignia de Plata de la Olimpiada Matemática Española**

**SERGIO MILLÁN LÓPEZ**

L'Hospitalet de Llobregat, Barcelona

**Olimpiada XXXVII, Cuarto premio**

**Olimpiada XXXVIII, Tercer premio**



**IGNACIO CASCUDO PUEYO**

Oviedo

**Olimpiada XXXVII, Quinto premio**

**MIQUEL OLIU BARTON**

Barcelona

**Olimpiada XXXVII, Sexto premio**

**DANIEL RODRIGO LÓPEZ**

Montcada i Reixac, Barcelona

**Olimpiada XXXVIII, Primer premio**

**Olimpiada XXXIX, Primer premio**

**DAVID GARCÍA SORIANO**

Madrid

**Olimpiada XXXVIII, Cuarto premio**

**SUSANA LADRA GONZÁLEZ**

Teo, A Coruña

**Olimpiada XXXVIII, Quinto premio**

**JOSÉ MIGUEL MANZANO PREGO**

Motril, Granada

**Olimpiada XXXVIII, Sexto premio**

**MOHAMMED BLANCA RUIZ**

Manises, Valencia

**Olimpiada XXXIX, Tercer premio**

**VÍCTOR GONZÁLEZ ALONSO**

Briviesca, Burgos

**Olimpiada XXXIX, Cuarto premio**

**JAVIER GÓMEZ SERRANO**

Madrid

**Olimpiada XXXIX, Quinto premio**

**MAITE PEÑA ALCARAZ**

Sevilla

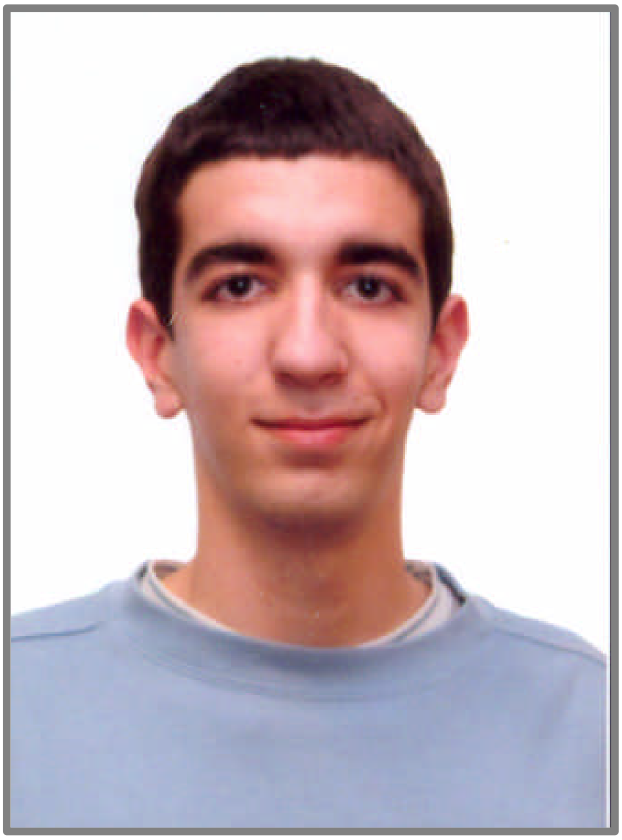
**Olimpiada XXXIX, Sexto premio**

**Olimpiada XL, Segundo premio**

**JOAQUIM SERRA MONTOLÍ**

Barcelona

**Olimpiada XL, Primer premio**



**MIGUEL TEIXIDÓ ROMÁN**

Lleida

**Olimpiada XL, Cuarto premio**

**FRANCISCO JAVIER HERNÁNDEZ HERAS**

Valladolid

**Olimpiada XL, Quinto premio**

# MARÍA ISABEL CORDERO MARCOS

Salamanca

**Olimpiada XL, Sexto premio**

**ELISA LORENZO GARCÍA**

Madrid

**Olimpiada XL, Tercer premio**

# OME 31

## Castellón

24 y 25 de Febrero de 1995

*Medallas de oro:*

Ángel Paredes Galán,
Jerónimo Arenas García,
Luis Fabiani Bendicho,
Jaume Andreu Pascual ,
Alejandro García Gil,
Ignacio Fernández Galván.

Problemas

# OME 32

## Tarragona

22 y 23 de Febrero de 1996

Problemas

*Medallas de oro:*

Sergi Elizalde Torrent,
Tomás Palacios Gutiérrez,
Fernando Rambla Blanco,
Antonio Jara de las Heras,
Patricia Sebastián Celorrio,
Víctor Martínez de Albéniz Margalef.

XXXIII
OLIMPIADA MATEMATICA

# OME 33

## Valencia

7 y 8 de Marzo de 1997

Problemas

*Medallas de oro:*

Anatoli Segura Vélez,
Miguel Lobo López,
Mario Andrés Montes García,
Max Bernstein Obiols,
Joseba Villate Bejarano,
Xavier Pérez Jiménez.

# OME 34

## Tarazona

13 y 14 de Marzo de 1998

Problemas

*Medallas de oro:*

Mario Andrés Montes García,
Ramón José Aliaga Varea,
David Martín Clavo,
María Pe Pereira,
Betriz Sanz Merino,
Jaime Vinuesa del Rio.

# OME 35

## Granada

12 y 13 de Marzo de 1999

Problemas

*Medallas de oro:*
Ramón José Aliaga Varea,
Andrés Tallos Tanarro,
Enrique Vallejo Gutiérrez,
Álvaro Navarro Tobar,
Javier Múgica de Ribera,
Néstor Sánchez Bejarano.

# OME 36

## Palma de Mallorca

30 y 31 de Marzo de 2000

*Medallas de oro:*
Carlos Gómez Rodríguez,
Luis Emilio García Martínez,
Alberto Suárez Real,
José María Cantarero López,
Manuel Pérez Molina,
Roberto Rubio Núñez.

Problemas


# OME 37

## Murcia

23 y 24 de Marzo de 2001

Problemas

*Medallas de oro:*
Javier Cóppola Rodríguez,
Martí Prats Soler,
Luis Hernández Corbato,
Sergio Millán López,
Ignacio Cascudo Pueyo,
Miquel Oliu Barton.

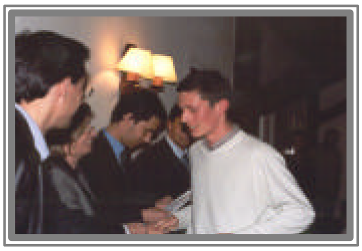
# OME 38

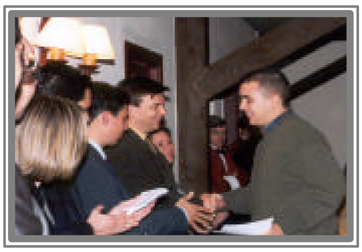
## Logroño

5 y 6 de Abril de 2002

Problemas

*Medallas de oro:*
Daniel Rodrigo López,
Luis Hernández Corbato,
Sergio Millán López,
David García Soriano,
Susana Ladra González,
José Miguel Manzano Prego.





# OME 39

## La Laguna

3 y 4 de Marzo de 2003

Problemas

*Medallas de oro:*
Daniel Rodrigo López
Luis Hernández Corbato,
Mohammed Blanca Ruiz,
Víctor González Alonso,
Javier Gómez Serrano,
Maite Peña Alcaraz.

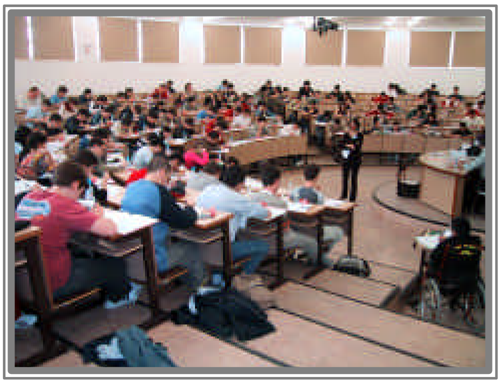
# OME 40

## Ciudad Real

26 y 27 de Marzo de 2004

Problemas

*Medallas de oro:*
Joaquim Serra Montolí,
Maite Peña Alcaraz,
Elisa Lorenzo García,
Miguel Teixidó Román,
Francisco J. Hernández Heras,
M. Isabel Cordero Marcos.



PÁGINA
PRINCIPAL

**Jordi Dou fue objeto de un homenaje en la OME de Tarragona**


**Acto de apertura en la Universitat Rovira i Virgili**

PÁGINA
PRINCIPAL

**Entrega de premios de la primera fase en la cena de clausura**

PÁGINA PRINCIPAL

**Cena de clausura: vista del salón**

PÁGINA
PRINCIPAL

**José Javier Etayo Miqueo fue objeto de un homenaje en Tarazona.**

**Entrega de la medalla de oro a María Pe Pereira**

PÁGINA
PRINCIPAL

**David Martín Clavo recibe la medalla de oro de manos de Amalia Gómez**

PÁGINA PRINCIPAL

**Los ganadores de medalla de oro con el Presidente de Comité Organizador**

PÁGINA PRINCIPAL

**Xavier Gratal recibe la  Mención Honorífica por un problema**

PÁGINA PRINCIPAL

**Antonio Martínez Naveira entrega una medalla de plata a Álvaro Navarro Tobar**

PÁGINA
PRINCIPAL

**Cinco de los premiados con medalla de oro**

PÁGINA PRINCIPAL

**Acto de entrega de premios de la primera fase**

PÁGINA
PRINCIPAL

**Ramón José Aliaga Varea recibe la medalla de oro**

PÁGINA
PRINCIPAL

**Javier Múgica de Ribera recibe la medalla de oro**

PÁGINA
PRINCIPAL

**Enrique Vallejo Gutiérrez recibe la medalla de oro**

PÁGINA
PRINCIPAL


**Los ganadores de medalla de oro en el acto de entrega de premios (Palau de Congressos del Poble Espanyol)**

PÁGINA PRINCIPAL


**Mesa presidencial del acto de entrega de premios de la primera fase (Escola d'Hoteleria de la Universitat de les Illes Balears)**

PÁGINA PRINCIPAL


**Mesa presidencial del acto de entrega de premios de la primera fase (Escola d'Hoteleria de la Universitat de les Illes Balears)**

PÁGINA PRINCIPAL

**Vista de la sala del acto de entrega de premios de la primera fase (Escola d'Hoteleria de la Universitat de les Illes Balears)**

PÁGINA PRINCIPAL


**Acto de entrega de premios de la segunda fase: Javier Cóppola recibe su medalla de oro. (Sala de Actos de la U. Politécnica de Cartagena)**

PÁGINA PRINCIPAL

**Acto de entrega de premios de la segunda fase: Luis Hernández recibe su medalla de oro. (Sala de Actos de la U. Politécnica de Cartagena)**

PÁGINA
PRINCIPAL


**Acto de entrega de premios de la segunda fase: Sergio Millán recibe su medalla de oro. (Sala de Actos de la U. Politécnica de Cartagena)**

PÁGINA PRINCIPAL


**Acto de entrega de premios de la segunda fase: Miquel Oliu Barton acaba de recibir su medalla de oro. (Sala de Actos de la U. Politécnica de Cartagena)**

PÁGINA PRINCIPAL

PÁGINA
PRINCIPAL

**Vista de la Sala en el acto de entrega de premios. En primer término, concursantes del equipo de Madrid. (Sala de Actos de la U. Politécnica de Cartagena)**

**Los seis premiados con medalla de oro. (Salón de Bodegas Franco-Españolas)**

PÁGINA PRINCIPAL

**Vista del salón de Bodegas Franco-Españolas. Cena de clausura y entrega de premios de la segunda fase. En primer término, algunos concursantes de Andalucía.**

PÁGINA
PRINCIPAL

**Acto de entrega de premios de la segunda fase: Daniel Rodrigo recibe su medalla de oro. (Salón de Bodegas Franco-Españolas)**

PÁGINA PRINCIPAL

**Acto de entrega de premios de la segunda fase: Luis Hernández recibe su medalla de oro. (Salón de Bodegas Franco-Españolas)**

PÁGINA PRINCIPAL

**Acto de entrega de premios de la segunda fase: Sergio Millán recibe su medalla de oro. (Salón de Bodegas Franco-Españolas)**

PÁGINA
PRINCIPAL

**Acto de entrega de premios de la segunda fase: David García recibe su medalla de oro. (Salón de Bodegas Franco-Españolas)**

PÁGINA PRINCIPAL

**Acto de entrega de premios de la segunda fase: Susana Ladra recibe su medalla de oro. (Salón de Bodegas Franco-Españolas)**

PÁGINA PRINCIPAL

**Acto de entrega de premios de la segunda fase: José Miguel Manzano recibe su medalla de oro. (Salón de Bodegas Franco-Españolas)**

PÁGINA PRINCIPAL

**Acto de entrega de premios: los seis premiados con medalla de oro.**
**(Paraninfo de la Universidad de Las Palmas, Gran Canaria).**

PÁGINA
PRINCIPAL

**Visita al Loro Parque en Puerto de la Cruz, Tenerife.**

PÁGINA
PRINCIPAL

**Los concursantes realizando una prueba. (Aula de la Universidad de La Laguna, Tenerife)**

PÁGINA PRINCIPAL

**Acto de entrega de premios de la segunda fase: Maite Peña Alcaraz recibe su medalla de oro. (Paraninfo de la Universidad de Las Palmas, Gran Canaria)**

PÁGINA PRINCIPAL

**Los seis ganadores de medalla de oro. (Antesala del Paraninfo de la Universidad de Las Palmas, Gran Canaria).**

PÁGINA PRINCIPAL

**Grupo de concursantes en la Plaza Mayor de Almagro, antes del Acto de Apertura celebrado en el Teatro Municipal de la ciudad.**

PÁGINA PRINCIPAL

**Todos los participantes de la olimpiada, en el escenario del Teatro Municipal de Almagro, después del Acto de Apertura.**

PÁGINA
PRINCIPAL

**Los concursantes en una de las pruebas. (Aula de la Universidad de Castilla-LaMancha, campus de Ciudad Real).**

PÁGINA PRINCIPAL

**Acto de Clausura en el Paraninfo de la Universidad de Castilla-La Mancha. Joaquim Serra Montolí acaba de recibir su medalla de oro.**

PÁGINA PRINCIPAL


**Acto de Clausura en el Paraninfo de la Universidad de Castilla-La Mancha. Los seis premiados con medalla de oro.**

PÁGINA PRINCIPAL

Reunida la Comisión de Olimpiadas de la Real Sociedad Matemática Española en sesión extraordinaria y a propuesta del Vicepresidente, acuerda por unanimidad y con gran satisfacción:

Conceder a D. Luis Hernández Corbato la insignia de plata de la Olimpiada Matemática Española, como reconocimiento a sus méritos al haber obtenido por primera vez en la historia de la OME medalla de Oro durante tres años consecutivos.

Canarias a 5 de marzo de 2003

La Secretaria

Fdo Mercedes Sánchez

Vº Bº La presidenta

Fdo Maria Gaspar

# IMO 24

**Paris, Francia**

6 y 7 de Julio de 1983

*Participantes:*
José Burillo Puig,
Roberto Selva Gómez (mh),
Francisco J. Díez Vega,
José Marañón Mora.

*Jefe de Delegación:* Ceferino Ruiz Garrido
*Delegado Adjunto:* Jordi Dou Mas de Xexàs

Problemas

# IMO 25

## Praga, Checoslovaquia

4 y 5 de Julio de 1984

*Participantes:*
Pablo Novaes Ledieu (mh),
Andrés García  Parrilla (mh),
Miguel Aparisi Botella,
Gonzalo Génova Fuster,
Agustín Rafael Tejera Gómez
Miguel Brandt Sanz.

Problemas

*Jefe de Delegación:* Juan Antonio Navarro González
*Delegada Adjunta:* María Gaspar Alonso-Vega

# IMO 26

## Joutsa, Finlandia

4 y 5 de Julio de 1985

*Participantes:*
Ricardo Pérez Marco (mh),
Ignacio Garijo Amilburo,
Juan Acuarón Joven,
Pablo Novaes Ledieu.

*Jefe de Delegación:* Ceferino Ruiz Garrido
*Delegada Adjunta:* María Gaspar Alonso-Vega

Problemas

# IMO 27

## Varsovia, Polonia

9 y 10 de Julio de 1986

*Participantes:*
Carlos Ueno Jacue (mh),
Alberto Garrido Arribas (bronce),
Ricardo Pérez Marco (plata),
Juan David González Cobas (bronce).

Problemas

*Jefe de Delegación:* Ceferino Ruiz Garrido
*Delegada Adjunta:* María Gaspar Alonso-Vega

# IMO 28

## La Habana, Cuba

10 y 11 de Julio de 1987

*Participantes:*
Fernando Galve Mauricio (bronce),
Salvador Villegas Barranco (bronce),
Santiago Vila Doncel (bronce),
Juan R. Valderrama Alcalde,
Pablo Benítez Jiménez,
Carlos J. Pérez Jiménez (mh).

Problemas

*Jefe de Delegación:* Ceferino Ruiz Garrido
*Delegada Adjunta:* María Gaspar Alonso-Vega

# IMO 29

## Canberra, Australia

15 y 16 de Julio de 1988

*Participantes:*
Javier Campins Pascual,
Ramón Esteban Romero,
Santiago Pérez-Cacho Fernando-Argüelles,
José Ignacio Nogueira Coriba,
Boris Bartolomé Mana,
Fernando Martínez Puente (MH).

*Jefe de Delegación:* María Gaspar Alonso-Vega
*Delegado Adjunto:* Francisco Bellot Rosado

Problemas

# IMO 30

## Braunschweig, R. F. de Alemania

18 y 19 de Julio de 1989

Problemas

*Participantes:*
Vicente Muñoz Velázquez (bronce),
Enrique García López (MH),
Alberto García Martínez (MH),
Cristina Draper Fontanales (MH),
Leandro Marín Muñoz,
Javier Portela Lemos (MH).

*Jefe de Delegación:* María Gaspar Alonso-Vega
*Delegado Adjunto:* Francisco Bellot Rosado

# IMO 31

**Beijing, R.P. China**

12 y 13 de Julio de 1990

Problemas

*Participantes:*
Francisco Ogando Serrano,
Daniel Lasaosa Medarde,
Marco Castrillón López,
Javier Arregui García,
José Javier Villalmanzo Manrique,
Enrique García López.

*Jefe de Delegación:* Francisco Bellot Rosado
*Delegado Adjunto:* Juan Manuel Conde Calero


# IMO 32

## Sigtuna, Suecia

17 y 18 de Julio de 1991

Problemas

*Participantes:*
Ignasi Mundet Riera (bronce),
Roger Espel Llima,
Marcos Durántez Gamzukoff,
Ignacio Uriarte Tuero,
Alberto Bravo de Mansilla Jiménez,
Ignacio Marcos Primo.

*Jefe de Delegación:* Francisco Bellot Rosado
*Delegado Adjunto:* Juan Manuel Conde Calero

# IMO 33

## Moscú, Rusia

15 y 16 de Julio de 1992

*Participantes:*

Problemas

Álvaro Begué Aguado,
Javier Ribón Herguedas,
José Miguel Atienza Riera,
Raquel Barco Moreno,
Roger Espel Llima (bronce),
Marcos Durántez Gamzukoff (MH).

*Jefe de Delegación:* Francisco Bellot Rosado
*Delegado Adjunto:* Juan Manuel Conde Calero

# IMO 34

## Istambul, Turquía

18 y 19 de Julio de 1993

*Participantes:*
Álvaro Begué Aguado (bronce),
Miguel Carrión Álvarez,
Antonio Rojas León (plata),
David Sevilla González,
Antonio Sánchez Esguevillas,
David Castell Burgaleta.

Problemas

*Jefe de Delegación:* Francisco Bellot Rosado
*Delegado Adjunto:* Juan Manuel Conde Calero

# IMO 35

## Hong Kong

13 y 14 de Julio de 1994

*Participantes:*
David Sevilla González,
Tomás Baeza Oliva,
Miguel Catalina Gallego,
Jerónimo Arenas García,
Miguel A. Bermúdez Carro,
Javier García Bringas.

Problemas

*Jefe de Delegación:* Francisco Bellot Rosado
*Delegado Adjunto:* Juan Manuel Conde Calero

CANADA

# IMO 36

## Toronto, Canadá

19 y 20 de Julio de 1995

Problemas

*Participantes:*
Ángel Paredes Galán (bronce),
Jerónimo Arenas García (MH),
Luis Fabiani Bendicho (MH),
Jaume Andreu Pascual (MH),
Alejandro García Gil,
Ignacio Fernández Galván.

*Jefe de Delegación:* Francisco Bellot Rosado
*Delegado Adjunto:* Juan Manuel Conde Calero

# IMO 37

## Bombay, India

10 y 11 de Julio de 1996

Problemas

*Participantes:*
Sergi Elizalde Torrent (MH),
Tomás Palacios Gutiérrez,
Fernando Rambla Blanco,
Antonio Jara de las Heras,
Patricia Sebastián Celorrio,
Víctor Martínez de Albéniz Margalef.

*Jefe de Delegación:* Francisco Bellot Rosado
*Delegado Adjunto:* Juan Manuel Conde Calero

38th International Mathematical Olympiad

# IMO 38

## Mar del Plata, Argentina

24 y 25 de Julio de 1997

*Participantes:*
Anatoli Segura Vélez,
Miguel Lobo López,
Mario Andrés Montes García,
Max Bernstein Obiols,
Joseba Villate Bejarano,
Xavier Pérez Jiménez.

Problemas

*Jefe de Delegación:* Francisco Bellot Rosado
*Delegado Adjunto:* Juan Manuel Conde Calero

# IMO 39

## Taipei, Taiwan

15 y 16 de Julio de 1998

Problemas

*Participantes:*
Mario Andrés Montes García (MH),
Ramón José Aliaga Varea,
David Martín Clavo,
María Pe Pereira,
Beatriz Sanz Merino,
Jaime Vinuesa del Río (bronce).

*Jefe de Delegación:* María Gaspar Alonso-Vega
*Delegado Adjunto:* Salvador Villegas Barranco


# IMO 40

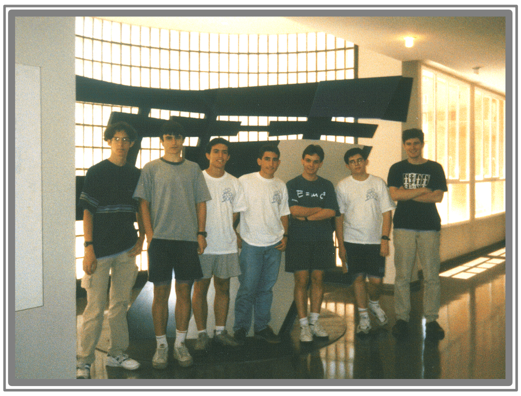
## Bucarest, Rumanía

18 y 19 de Julio de 1999

*Participantes:*
Ramón José Aliaga Varea (bronce),
Andrés Tallos Tanarro,
Enrique Vallejo Gutiérrez,
Álvaro Navarro Tobar,
Javier Múgica de Ribera (MH),
Néstor Sancho Bejarano.

*Jefe de Delegación:* María Gaspar Alonso-Vega
*Delegado Adjunto:* Marco Castrillón López

Problemas



# IMO 41

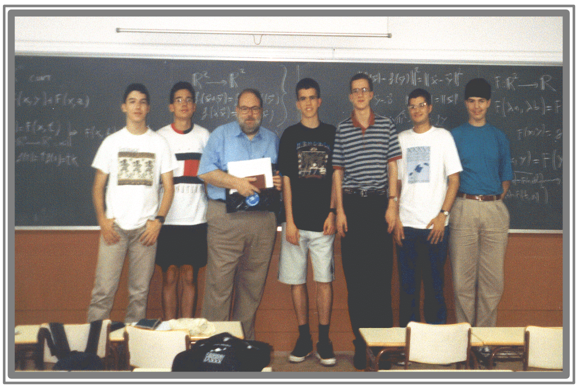
## Taejon, Corea del Sur

18 y 19 de Julio de 2000

*Participantes:*
Carlos Gómez Rodríguez,
Luis Emilio García Martínez,
Alberto Suárez Real,
José M. Cantarero López (MH),
Manuel Pérez Molina,
Roberto Rubio Núñez.

*Jefe de Delegación:* María Gaspar Alonso-Vega
*Delegado Adjunto:* Juan Manuel Conde Calero

Problemas



INTERNATIONAL MATHEMATICAL OLYMPIAD math expands horizons USA 2001

# IMO 42

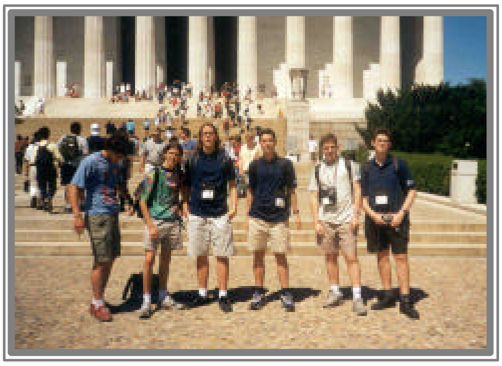
## Washington DC, USA

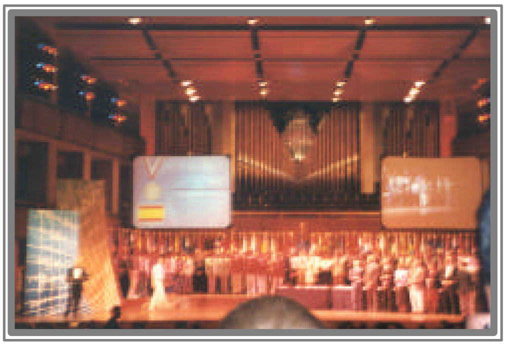
18 y 19 de Julio de 2001

*Participantes:*
Martí Prats Soler,
Luis Hernández Corbato (bronce),
Sergio Millán López,
Ignacio Cascudo Pueyo,
Miquel Oliu Barton (MH),
Joaquim Cevallos Morales (MH).

Problemas

*Jefe de Delegación:* María Gaspar Alonso-Vega
*Delegada Adjunta:* Mercedes Sánchez Benito





UK IMO 2002

INTERNATIONAL MATHEMATICAL OLYMPIAD 2002 UK. 19 - 30 JULY

# IMO 43

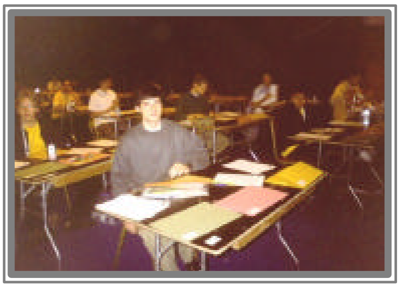
## Glasgow, Reino Unido

24 y 25 de Julio de 2002

*Participantes:*
Daniel Rodrigo López,
Luis Hernández Corbato (bronce),
Sergio Millán López (MH),
David García Soriano,
Susana Ladra González,
José Miguel Manzano Prego.

Problemas

*Jefe de Delegación:* María Gaspar Alonso-Vega
*Delegado Adjunto:* Juan Manuel Conde Calero




# IMO 44

## Tokyo, Japón

13 y 14 de Julio de 2003

*Participantes:*
Daniel Rodrigo López (MH),
Luis Hernández Corbato (MH),
Mohammed Blanca Ruiz (MH),
Víctor González Alonso (bronce),
Javier Gómez Serrano,
Maite Peña Alcaraz (MH).

Problemas

*Jefe de Delegación:* María Gaspar Alonso-Vega
*Delegado Adjunto:* Marco Castrillón López

**El equipo español en París**

PÁGINA PRINCIPAL

**El equipo español ante la Sorbona**

PÁGINA
PRINCIPAL

**Todos los participantes de la IMO 26 en Joutsa**

PÁGINA
PRINCIPAL

**Saliendo del acto de entrega de premios**

PÁGINA
PRINCIPAL

**Discutiendo con los participantes**

PÁGINA
PRINCIPAL

**Saliendo del acto de entrega de premios**

PÁGINA
PRINCIPAL

**Los equipos de Colombia, Rumanía y España en Helsinki**

PÁGINA
PRINCIPAL

**Paseando por Joutsa**

PÁGINA PRINCIPAL

**En la casa natal de Chopin**

PÁGINA
PRINCIPAL

**En la casa natal de Chopin**

PÁGINA
PRINCIPAL

**De charla en los jardines de la casa natal de Chopin**

PÁGINA PRINCIPAL


**En la Catedral de La Habana**

PÁGINA
PRINCIPAL


**Los concursantes ante la Catedral de La Habana**

PÁGINA PRINCIPAL


**En la Catedral de La Habana**

PÁGINA
PRINCIPAL


**Paseando por La Habana**

PÁGINA
PRINCIPAL

**La delegación española en Canberra**

PÁGINA PRINCIPAL

El equipo español en la Embajada de España en Canberra

PÁGINA PRINCIPAL

**El equipo español con algunas acompañantes**

PÁGINA PRINCIPAL

**Vicente Muñoz Velázquez con otros concursantes en el Acto de entrega de premios**

PÁGINA PRINCIPAL


**Vicente Muñoz Velázquez con otros concursantes en el Acto de entrega de premios**

PÁGINA PRINCIPAL

**El equipo español con la Jefe de Delegación y el guía alemán**

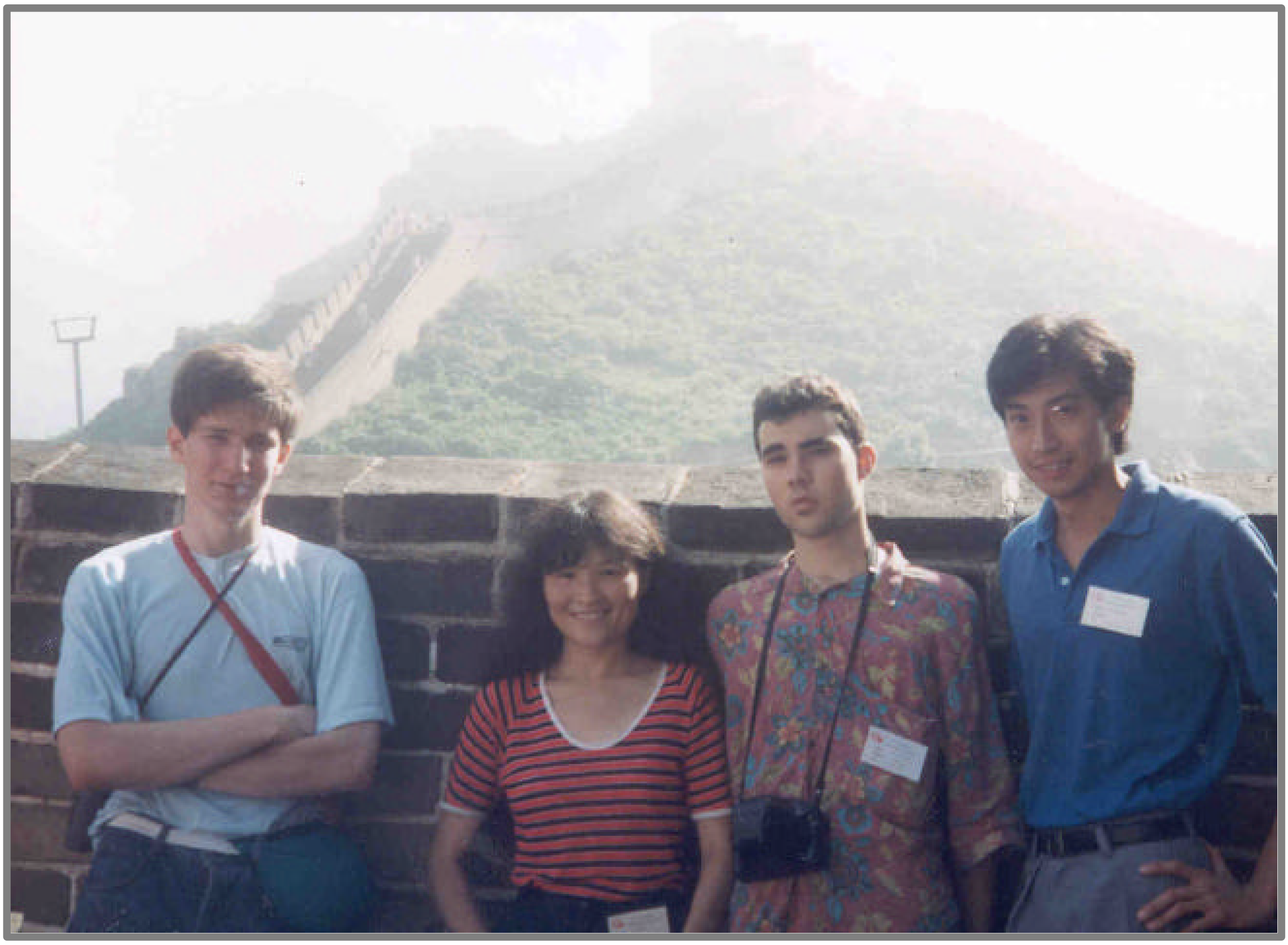
PÁGINA
PRINCIPAL

**La delegación ante la Embajada de España en Beijing**

PÁGINA PRINCIPAL


**El equipo español ante la residencia**

PÁGINA PRINCIPAL



**En la Gran Muralla**

PÁGINA PRINCIPAL


**El equipo español en el aeropuerto, de regreso**

PÁGINA
PRINCIPAL

**Resolviendo problemas en el metro**

PÁGINA
PRINCIPAL

**La delegación española en el aeropuerto de Barajas, a la salida**

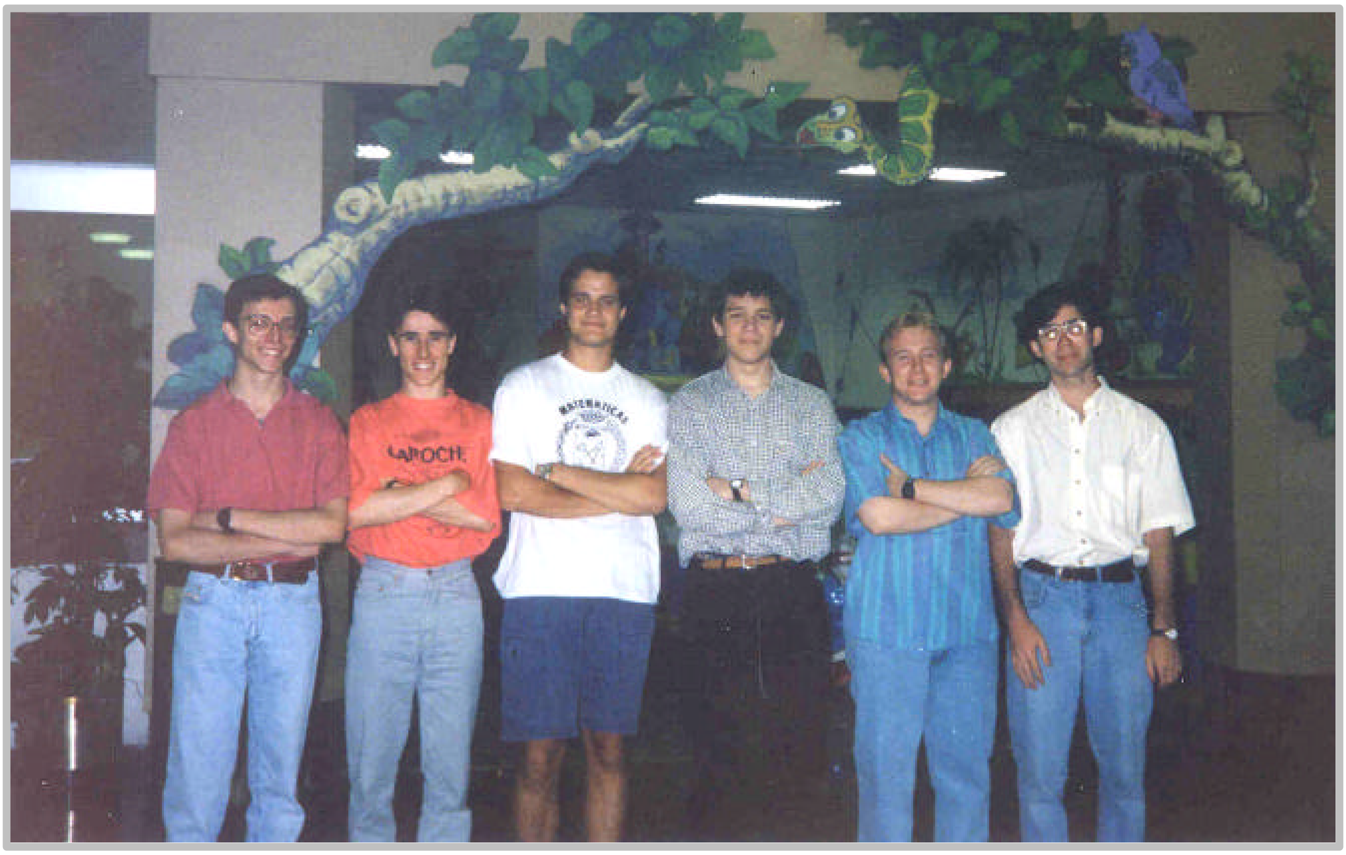
PÁGINA
PRINCIPAL

**Sesiones de preparación en el IES Ferrari de Valladolid**

PÁGINA
PRINCIPAL

**En Istambul con algunos colegas y acompañantes**

PÁGINA
PRINCIPAL



**El equipo español en la entrada del hotel en Hong Kong**

PÁGINA PRINCIPAL

**Sesiones de preparación en el IES E. Ferrari de Valladolid**

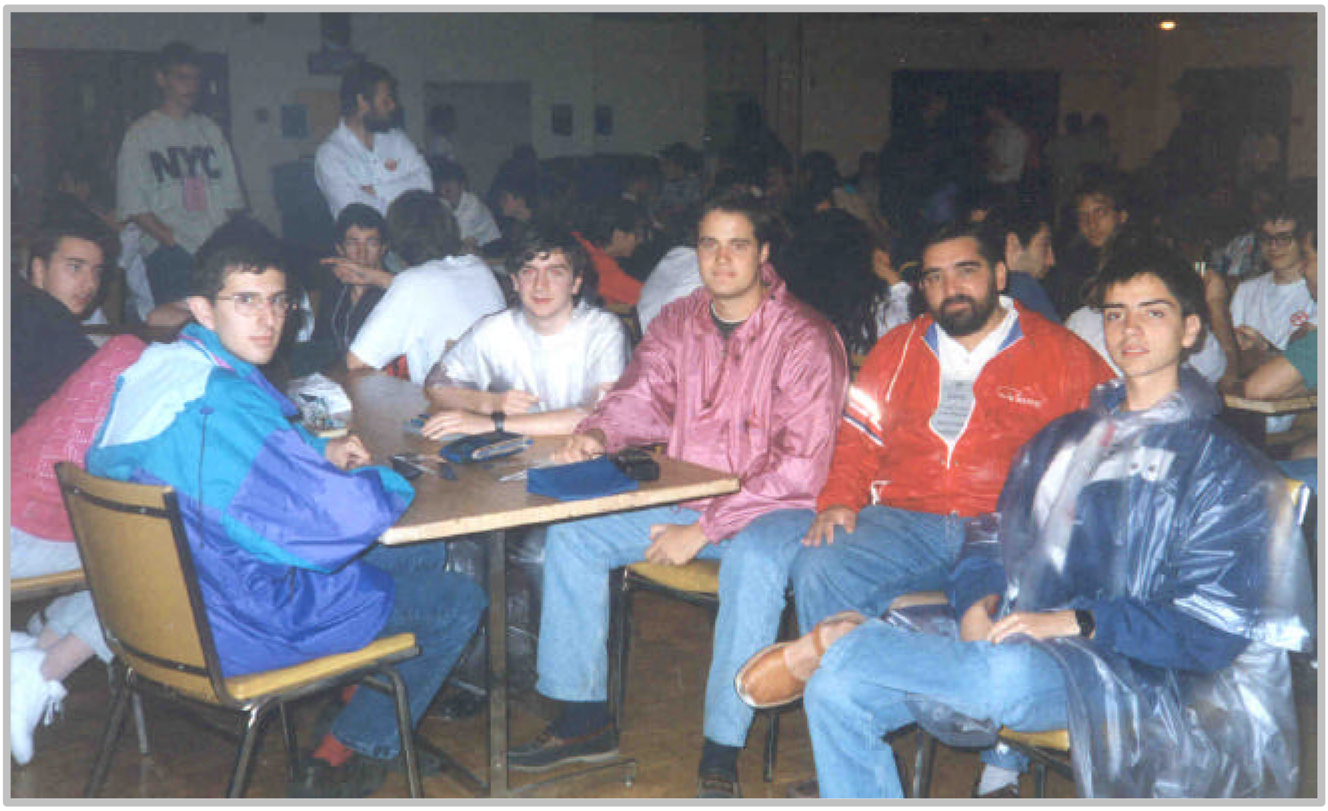
PÁGINA PRINCIPAL

**El equipo español después de la entrega de premios**

PÁGINA
PRINCIPAL

**Ángel Paredes luce su medalla**

PÁGINA
PRINCIPAL



**Momentos ante de la primera prueba en la U. de Toronto**

PÁGINA PRINCIPAL

**Paseando por Toronto**

PÁGINA
PRINCIPAL


**Paseando por Toronto**

PÁGINA
PRINCIPAL

**En el Centro de Ciencias Atómicas de Bombay**

PÁGINA PRINCIPAL

**Acto de entrega de premios**

PÁGINA PRINCIPAL

**El equipo español en Mar del Plata**

PÁGINA
PRINCIPAL

**En el aeropuerto de Barajas, antes de salir**

PÁGINA PRINCIPAL

**Comida después de la primera prueba**

PÁGINA PRINCIPAL

**Sesiones de preparación en el IES E. Ferrari de Valladolid**

PÁGINA PRINCIPAL


**A la salida de la ceremonia de clausura**

PÁGINA
PRINCIPAL

**En el comedor de la residencia**

PÁGINA
PRINCIPAL


**La delegación española en el aeropuerto de Taipei, de regreso**

PÁGINA PRINCIPAL

La delegación española y acompañantes, de turismo

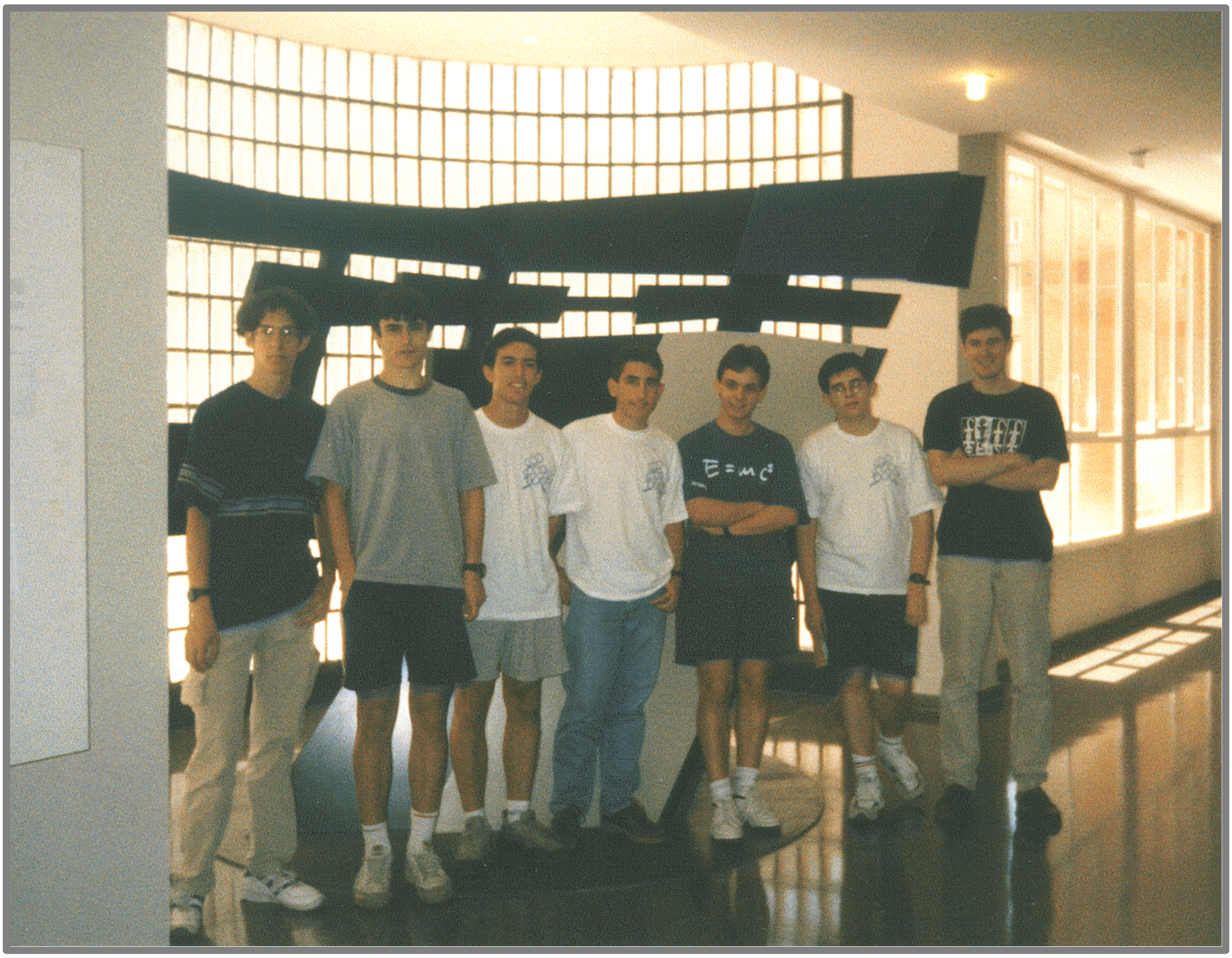
PÁGINA PRINCIPAL

**El equipo en Bucarest**

PÁGINA
PRINCIPAL


**En el aeropuerto de Bucarest**

PÁGINA PRINCIPAL



**Sesiones de preparación en la Facultad de Matemáticas de la U. Complutense de Madrid. Ante el monumento a Euler**

PÁGINA PRINCIPAL


**Después de la entrega de premios**

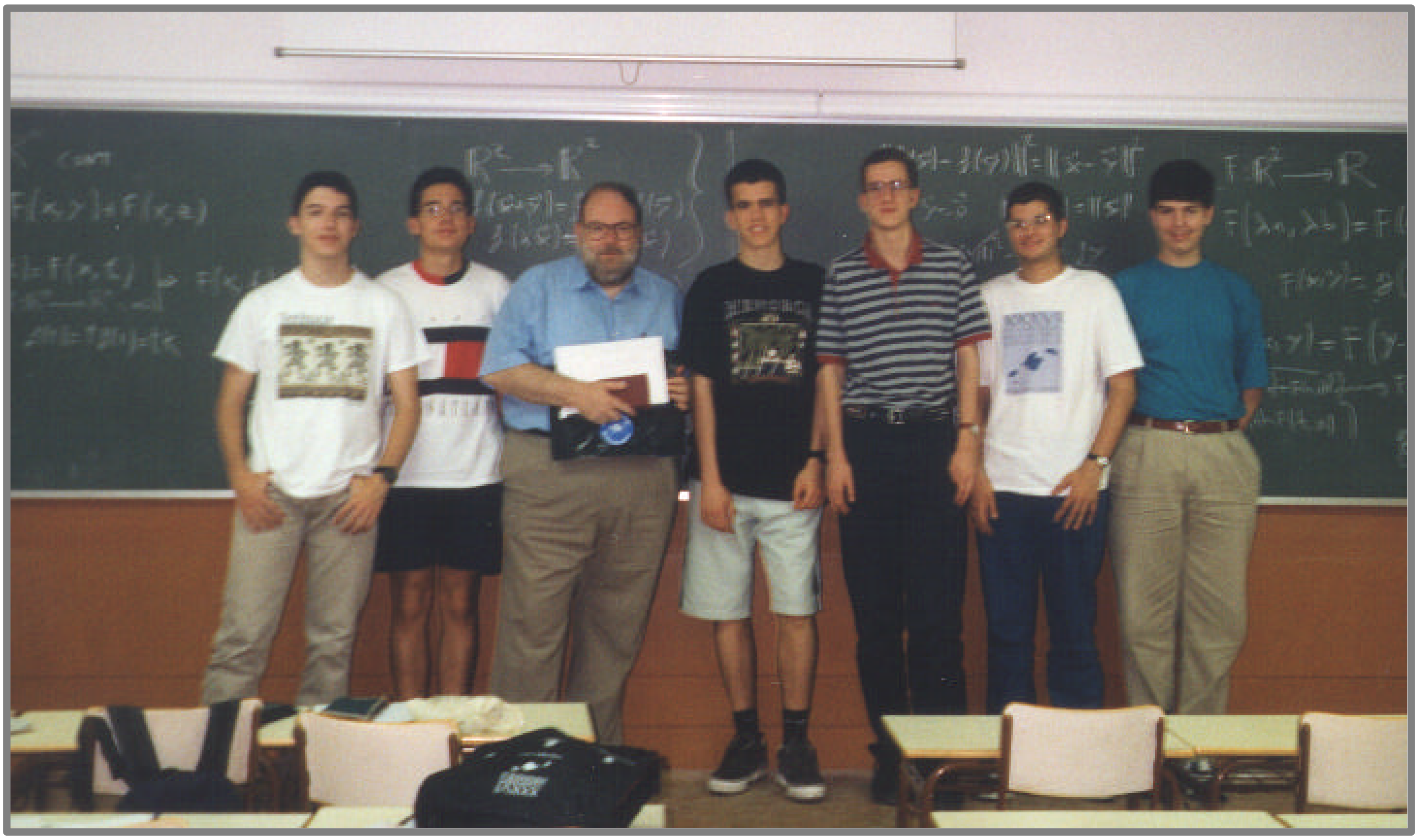
PÁGINA PRINCIPAL


**Antes del acto de apertura en Taejon**

PÁGINA PRINCIPAL

**De turismo**

PÁGINA
PRINCIPAL

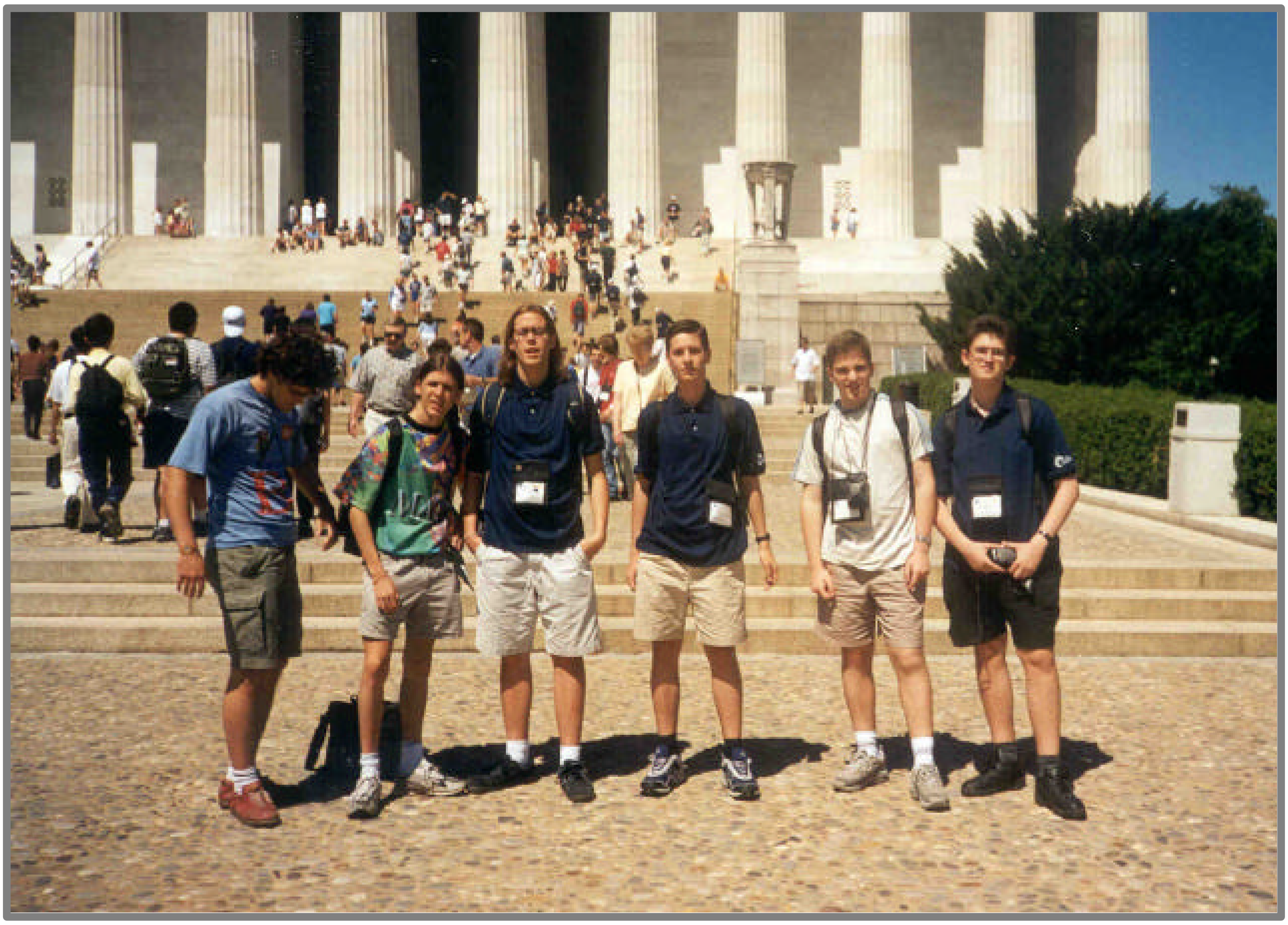


**Sesiones de preparación en la F. de Matemáticas y Estadística de la U. Politécnica de Cataluña. Con Claudi Alsina**

PÁGINA
PRINCIPAL

**La delegación española**

PÁGINA
PRINCIPAL



**En el Lincoln Memorial**

PÁGINA
PRINCIPAL

**Resolviendo problemas**

PÁGINA PRINCIPAL

**Luis Hernández Corbato se dirige a recibir su medalla (Acto de clausura, Kennedy Center)**

PÁGINA PRINCIPAL

**De excursión a Baltimore**

PÁGINA PRINCIPAL


**La delegación española después de las pruebas, en un crucero**

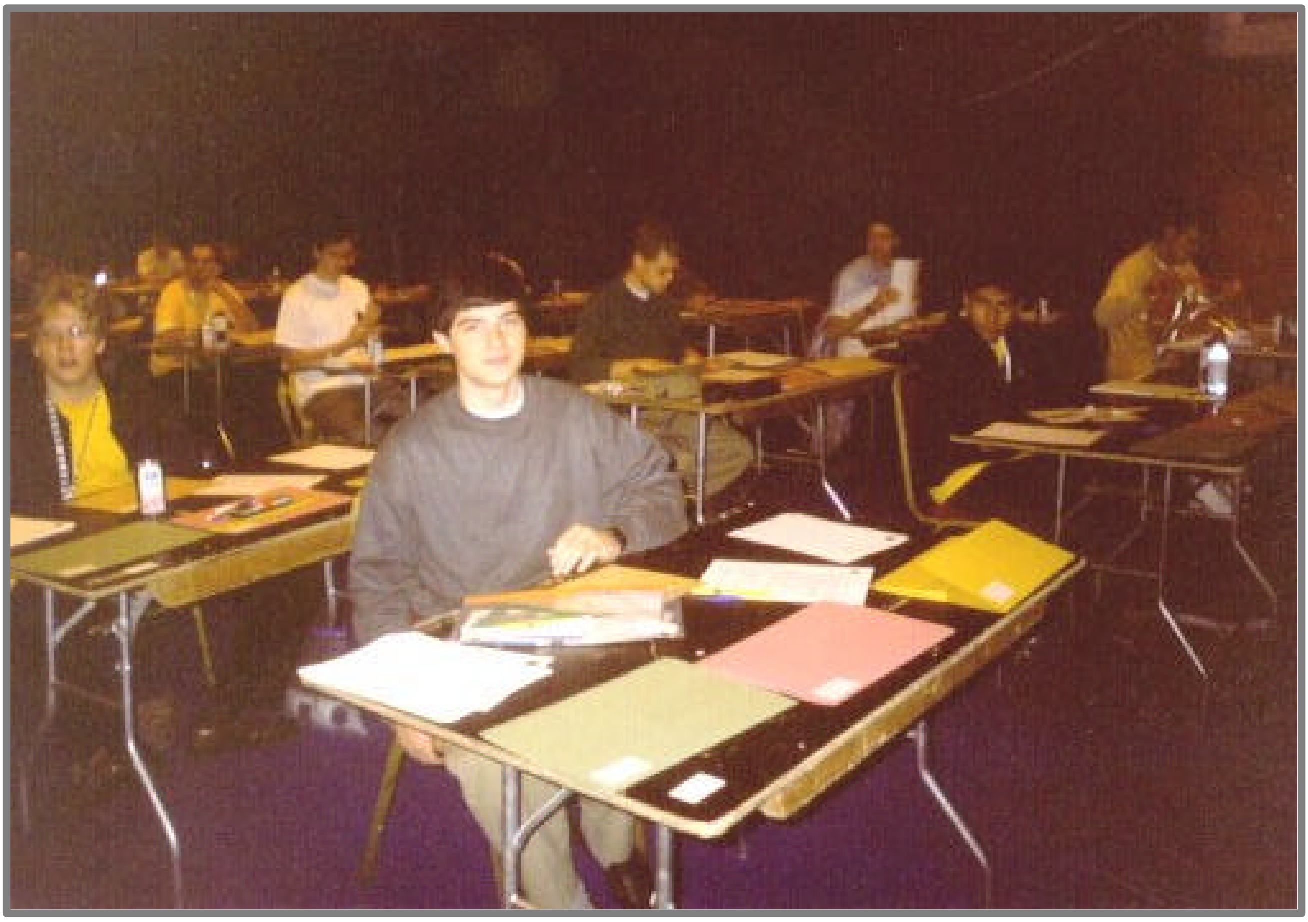
PÁGINA PRINCIPAL


**Ceremonia de entrega de premios. Luis Hernández Corbato, acaba de recibir su medalla de plata**

PÁGINA PRINCIPAL


**Los concursantes en una excursión a Edinburgh**

PÁGINA PRINCIPAL



**David García Soriano antes de empezar una prueba**

PÁGINA PRINCIPAL

**Sergio Millán López antes de empezar una prueba**

PÁGINA PRINCIPAL

**El equipo español con la guía británica**

PÁGINA PRINCIPAL

**Los concursantes en la cafetería**

PÁGINA PRINCIPAL

**La delegación española después de las pruebas.**

PÁGINA
PRINCIPAL

**Los concursantes españoles y el guía japonés en el parque de atracciones.**

PÁGINA PRINCIPAL


**Los concursantes intentando descifrar el plano del metro**

PÁGINA
PRINCIPAL


**De visita al templo**

PÁGINA
PRINCIPAL

**Daniel Rodrigo intenta que Mohammed Blanca pase desapercibido en las pruebas**

PÁGINA PRINCIPAL

# OIM 1

## Villa de Leyva, Colombia

12 y 13 de Diciembre de 1985

*Participantes:*
Ignacio Garijo Amilburo (plata),
Ricardo Pérez Marco (plata),
Carlos Ueno Jacue (bronce),
Alberto Garrido Arribas (bronce).

*Jefe de Delegación:* Ceferino Ruiz Garrido
*Tutora:* María Gaspar Alonso-Vega

Problemas

# OIM 2

## Salto y Paysandú, Uruguay

28 y 29 de Enero de 1987

Problemas

*Participantes:*
Fernando Galve Mauricio (oro),
Alberto Garrido Arribas (bronce),
Carlos Ueno Jacue (oro),
Salvador Villegas Barranco (bronce).

*Jefe de Delegación:* Ceferino Ruiz Garrido
*Tutora:* María Gaspar Alonso-Vega


# OIM 3

**Lima, Perú**

Abril de 1988

Problemas

*Participantes:*
Ramón Esteban Romero (plata),
Fernando Galve Mauricio (oro),
Santiago Vila Doncel (bronce),
Javier Campins Pascual.

*Jefe de Delegación:* María Gaspar Alonso-Vega
*Tutor:* Francisco Bellot Rosado

# OIM 4

## La Habana, Cuba

Abril de 1989

*Participantes:*
Ramón Esteban Romero (plata),
Enrique García López (bronce),
Vicente Muñoz Velázquez,
Fernando Martínez Puente.

*Jefe de Delegación:* María Gaspar Alonso-Vega
*Tutor:* Francisco Bellot Rosado

Problemas

V Olimpiada Matemática Iberoamericana

# OIM 5

## Valladolid, España

Septiembre de 1990

Problemas

*Participantes:*
Javier Arregui García (bronce),
Marco Castrillón López (bronce),
Daniel Lasasosa Medarde (plata),
Francisco Ogando Serrano (oro).

*Jefe de Delegación:* María Gaspar A.-Vega
*Tutor:* Ricardo Pérez Marco

# OIM 6

## Córdoba, Argentina

Septiembre de 1991

Problemas

*Participantes:*
Daniel Lasaosa Medarde (plata),
Ignacio Marcos Primo (plata),
Ignasi Mundet Riera (plata),
Ignacio Uriarte Tuero (plata).

*Jefe de Delegación:* María Gaspar Alonso-Vega
*Tutor:* Francisco Bellot Rosado

# OIM 7

## Caracas, Venezuela

Septiembre de 1992

Problemas

*Participantes:*
Álvaro Begué Aguado (plata),
José Miguel Atienza Riera (bronce),
Javier Ribón Herguedas (oro),
Raquel Barco Moreno (MH).

*Jefe de Delegación:* María Gaspar Alonso-Vega
*Tutor:* Francisco Bellot Rosado

# OIM 8

## México DF, México

14 y 15 de Septiembre de 1993

Problemas

*Participantes:*
Álvaro Begué Aguado (plata),
Miguel Carrión Álvarez (bronce),
Antonio Rojas León (oro),
David Sevilla González (MH).

*Jefe de Delegación:* María Gaspar Alonso-Vega
*Tutor:* Francisco Bellot Rosado

# OIM 9

## Fortaleza, Brasil

Septiembre de 1994

i Problemas

*Participantes:*
Antonio Rojas León (oro),
Jerónimo Arenas García (bronce),
Miguel A. Bermúdez Carro,
Javier García de Bringas (bronce).

*Jefe de Delegación:* Francisco Bellot Rosado
*Tutor:* José Aymerich Miralles

# OIM 10

## Región V, Chile

26 y 27 de Septiembre de 1985

*Participantes:*
Jaume Andreu Pascual (bronce),
Jerónimo Arenas García (plata),
Ángel Paredes Galán (plata),
Luis Fabiani Bendicho (bronce).

Problemas

*Jefe de Delegación:* Francisco Bellot Rosado
*Tutor:* José Aymerich Miralles

# OIM 11

## San José, Costa Rica

Septiembre de 1996

Problemas

*Participantes:*
Sergi Elizalde Torrent (bronce),
Antonio Jara de las Heras (bronce),
Víctor Martínez de Albéniz Margalef (bronce),
Fernando Rambla Blanco (bronce).

*Jefe de Delegación:* Francisco Bellot Rosado
*Tutor:* José Aymerich Miralles

OLIMPIADA IBEROAMERICANA DE MATEMATICAS México 97

# OIM 12

## Guadalajara, México

Setiembre de 1997

Problemas

*Participantes:*
Sergi Elizalde Torrent (plata),
Miguel Lobo López (bronce),
Mario Andrés Montes García (bronce),
Xavier Pérez Jiménez (bronce).

*Jefe de Delegación:* Francisco Bellot Rosado
*Tutor:* Miquel Amengual Coves

# OIM 13

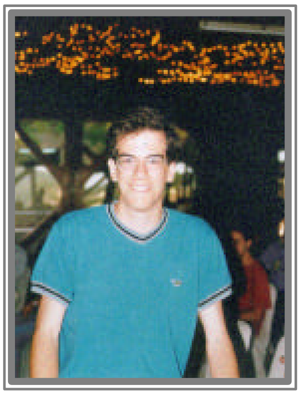
## Puerto Plata, República Dominicana

Septiembre de 1998

Problemas

*Participantes:*
Ramón José Aliaga Varea (plata),
Mario Andrés Montes García (plata),
María Pe Pereira (bronce),
Jaime Vinuesa del Rio (bronce).

*Jefe de Delegación:* Ceferino Ruiz Garrido
*Tutor:* José Aymerich Miralles



OLIMPIADA IBEROAMERICANA DE MATEMATICA

XIV OIM

LA HABANA ´99

# OIM 14

## La Habana, Cuba

Septiembre de 1999

Problemas

*Participantes:*
Ramón José Aliaga Varea (plata),
Álvaro Navarro Tobar (plata),
Javier Múgica de Ribera (plata),
Néstor Sánchez Bejarano (bronce).

*Jefe de Delegación:* Ceferino Ruiz Garrido
*Tutora:* Mercedes Sánchez Benito

# OIM 15

## Caracas, Venezuela

Septiembre de 2000

Problemas

*Participantes:*
Alberto Suárez Real (plata),
José M. Cantarero López (plata),
Luis Emilio García Martínez (plata),
Carlos Gómez Rodríguez (bronce).

*Jefe de Delegación:* José Aymerich Miralles
*Tutor:* Salvador Villegas Barranco

# OIM 16

## Minas, Uruguay

Septiembre de 2001

Problemas

*Participantes:*
Luis Hernández Corbato (oro),
Alberto Suárez Real (bronce),
Miquel Oliu Barton,
Joaquim Cevallos Morales.

*Jefe de Delegación:* Ceferino Ruiz Garrido
*Tutor:* Juan Manuel Conde Calero

XVII OLIMPÍADA IBEROAMERICANA DE MATEMÁTICA

El Salvador 2002

# OIM 17

## San Salvador, El Salvador

Septiembre de 2002

Problemas

*Participantes:*
Daniel Rodrigo López (plata)
Sergio Millán López (plata),
David García Soriano,
José Miguel Manzano Prego (plata).

*Jefe de Delegación:* Marco Castrillón
*Tutor:* Ignasi Mundet

# OIM 18

## Mar del Plata, Argentina

Septiembre de 2003

Problemas

*Participantes:*
Daniel Rodrigo López (bronce),
Luis Hernández Corbato (plata),
Víctor González Alonso (MH),
Maite Peña Alcaraz (bronce).

*Jefe de Delegación:* José Aymerich
*Tutor:* Ignasi Mundet

**La delegación española el dia de la entrega de premios**

PÁGINA
PRINCIPAL

**Personalidades de España y Puerto Rico, el dia de la entrega de premios**

PÁGINA PRINCIPAL

**Un grupo de ganadores de medalla de plata**

PÁGINA
PRINCIPAL

**Salida del acto de entrega de premios**

PÁGINA PRINCIPAL

**La delegación española con el Presidente del Jurado**

PÁGINA PRINCIPAL


**Comprando mate**

PÁGINA
PRINCIPAL


**Durante la prueba**

PÁGINA
PRINCIPAL

**La Tutora y un participante**

PÁGINA PRINCIPAL

**Después de la entrega de premios**

PÁGINA
PRINCIPAL

**La delegación española después de la entrega de premios**

PÁGINA
PRINCIPAL

**Grupo de  participantes el dia de la entrega de premios**

PÁGINA PRINCIPAL


**El Ministro de Educación de Cuba preside el acto de entrega de premios**

PÁGINA PRINCIPAL

**Reunión de antiguos olímpicos**

PÁGINA
PRINCIPAL

**La delegación española con las medallas**

PÁGINA PRINCIPAL

**El equipo español con el tutor y su esposa**

PÁGINA
PRINCIPAL

**Reunión de antiguos olímpicos ante la sede de las Cortes de Castilla, esperando el acto de entrega de premios**

PÁGINA PRINCIPAL


**La delegación española ante la sede de las Cortes de Castilla, esperando el acto de entrega de premios**

PÁGINA PRINCIPAL

**Dos concursantes y la Jefe de Delegación con unos participantes chilenos**

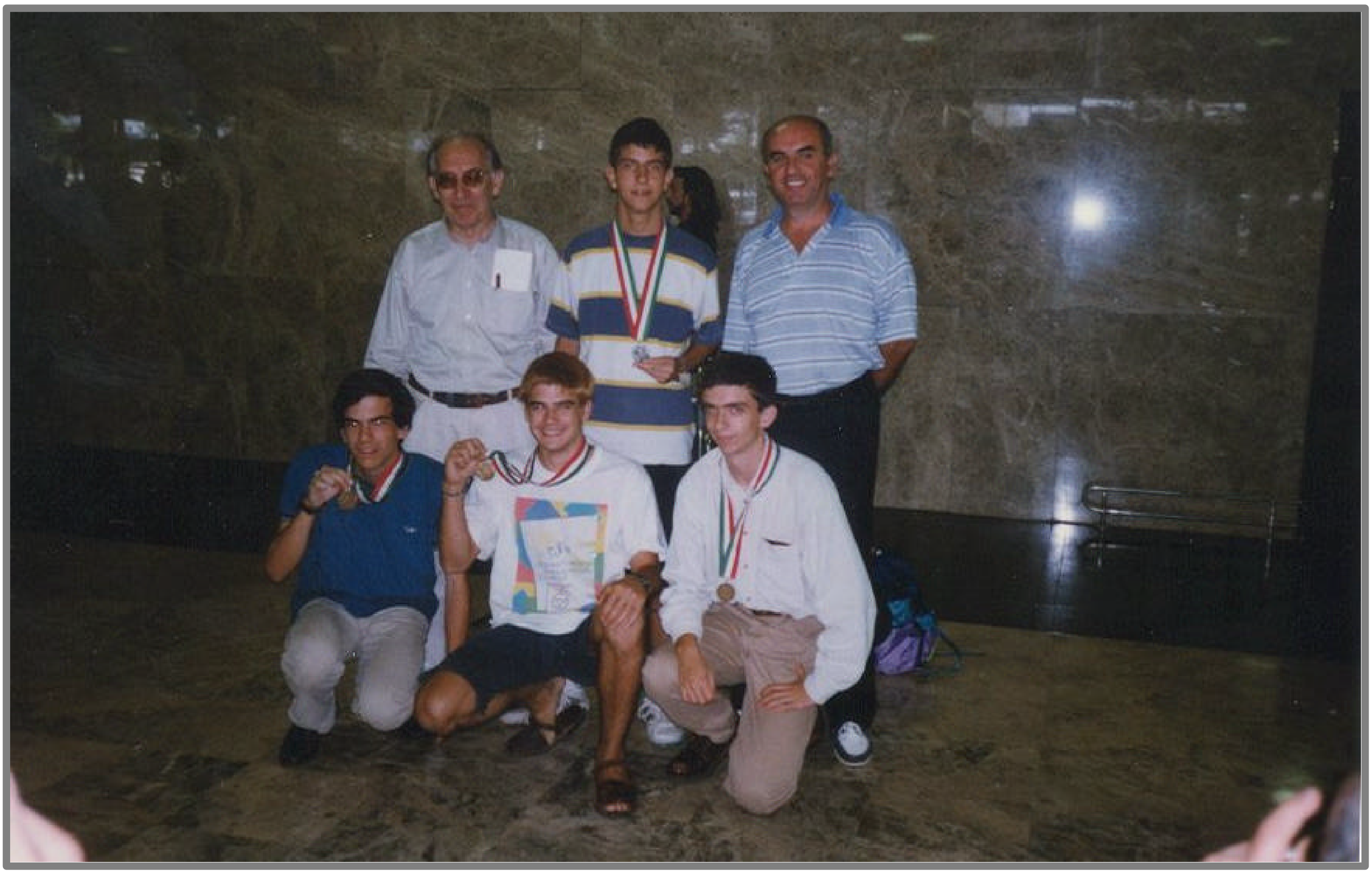
PÁGINA PRINCIPAL

**Dos españoles y cuatro chilenos en la cena de clausura**

PÁGINA PRINCIPAL

**A la salida del acto de entrega de medallas**

PÁGINA
PRINCIPAL

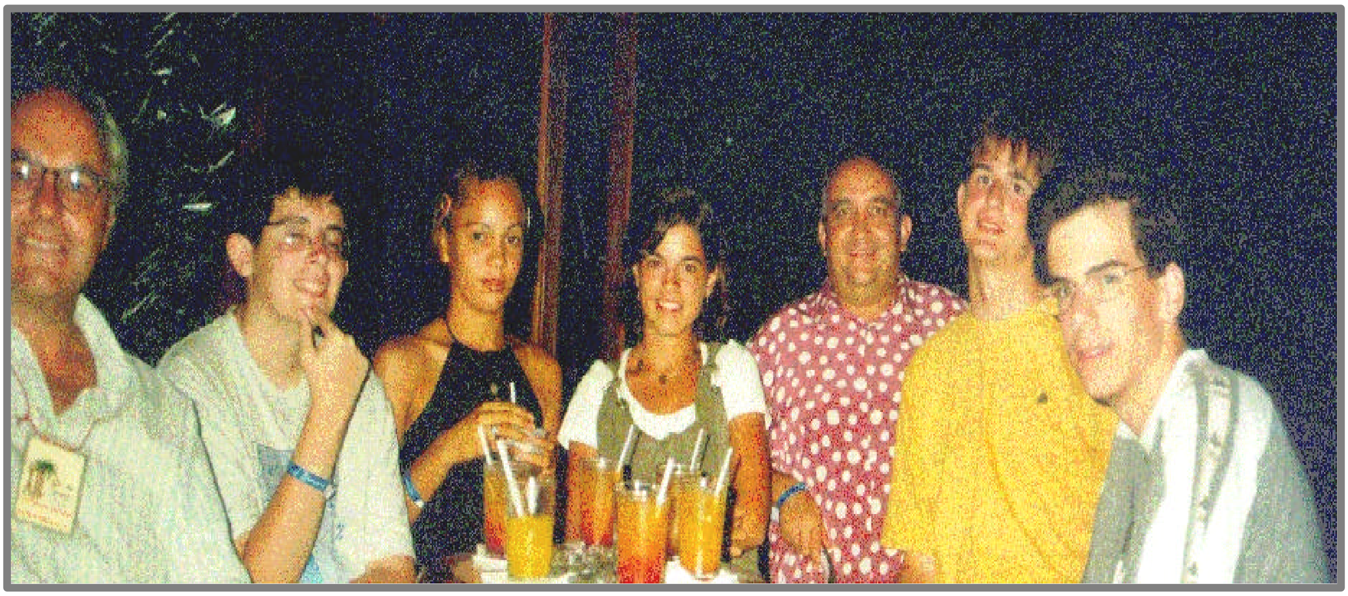


**La delegación española**

PÁGINA PRINCIPAL

**La delegación española**

PÁGINA
PRINCIPAL

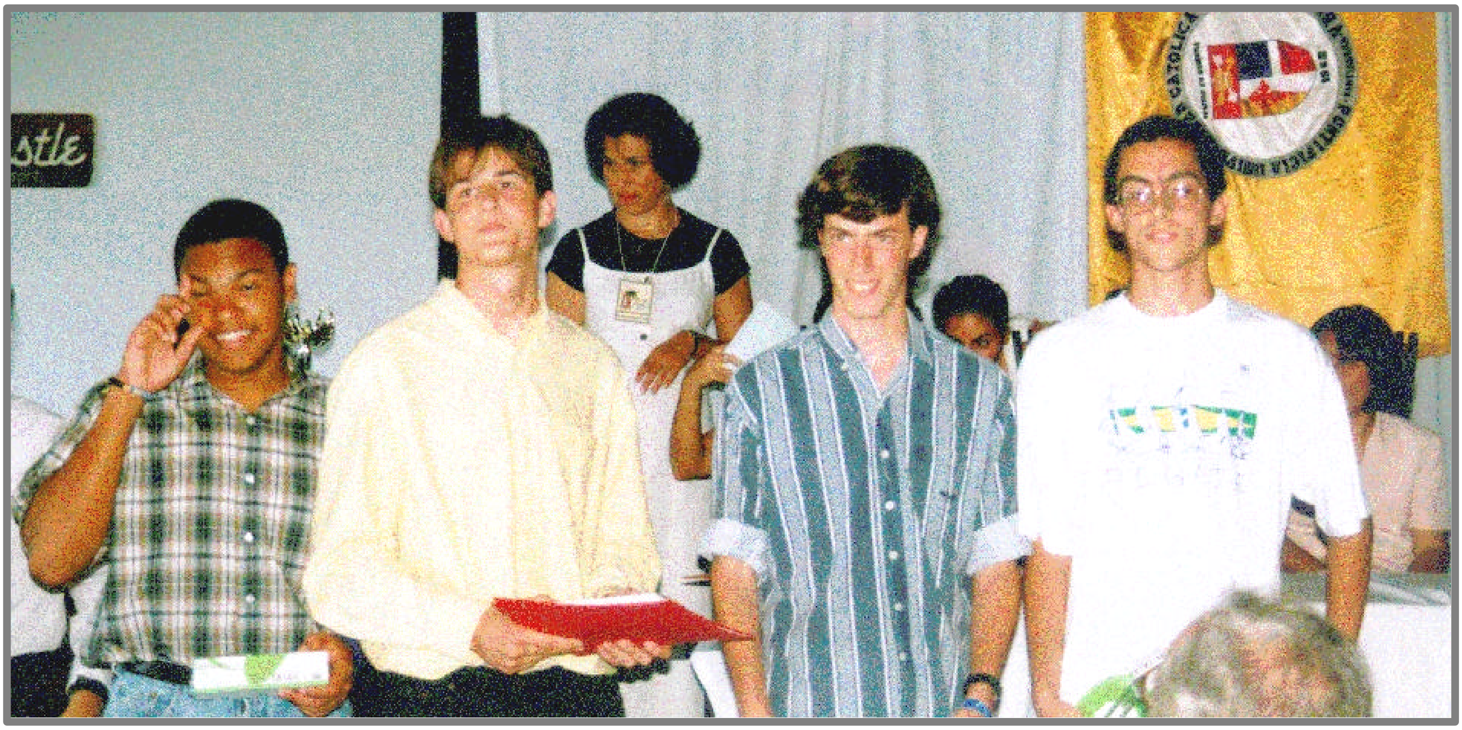


**Tomando un refresco**

PÁGINA PRINCIPAL

**Mario Andrés Montes García con otros concursantes premiados**

PÁGINA PRINCIPAL



**Jaime Vinuesa del Rio con otros concursantes premiados**

PÁGINA PRINCIPAL

**María Pe Pereira después de recibir su medalla**

PÁGINA PRINCIPAL

**Jaime Vinuesa del Rio después de recibir su medalla**

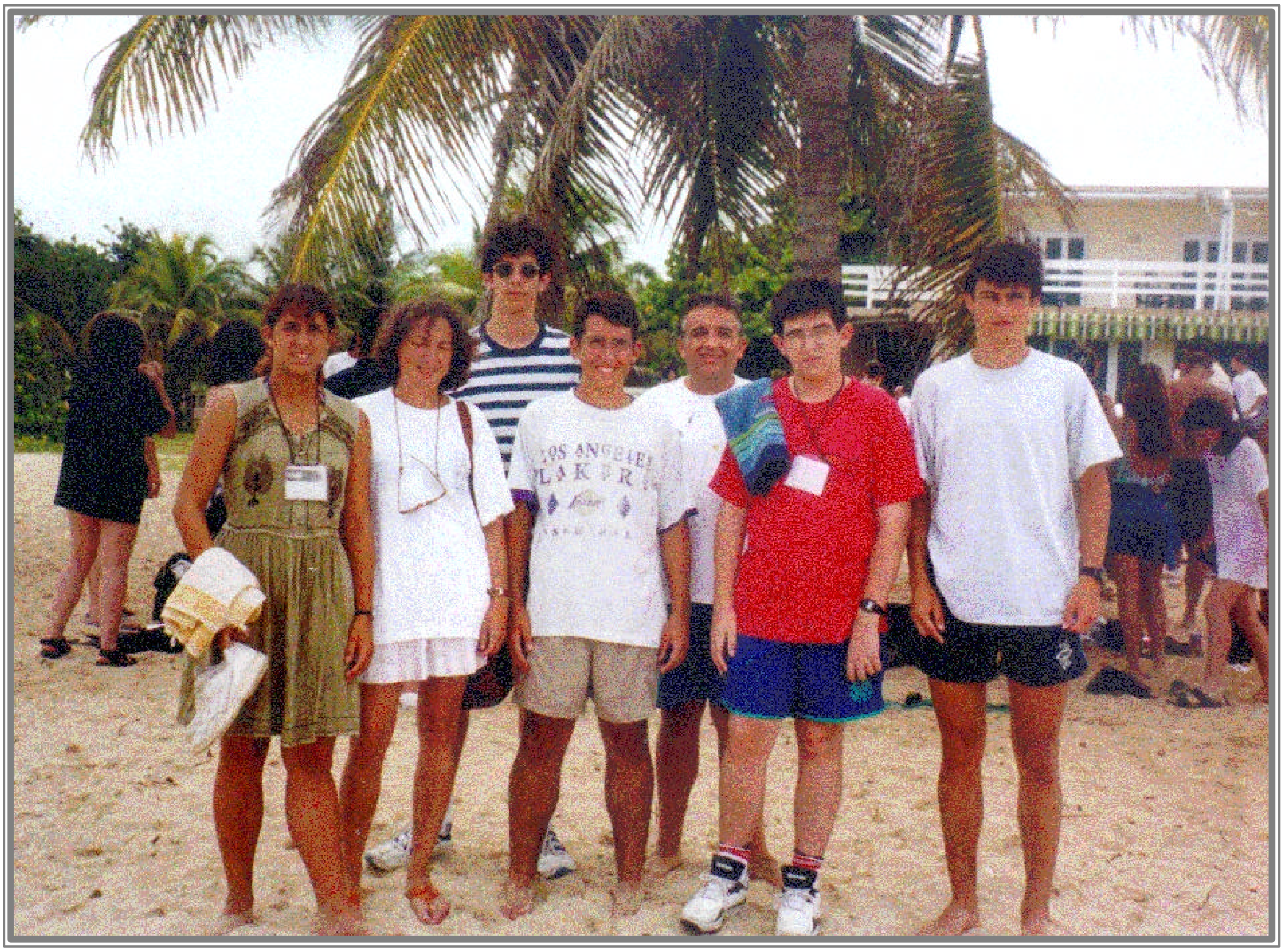
PÁGINA PRINCIPAL

**Ramón José Aliaga Varea en el momento de recibir su medalla**

PÁGINA PRINCIPAL

**Mario Andrés Montes García**

PÁGINA
PRINCIPAL




**La delegación española en La Habana, Playa del Este**

PÁGINA
PRINCIPAL


**Acto de entrega de premios**

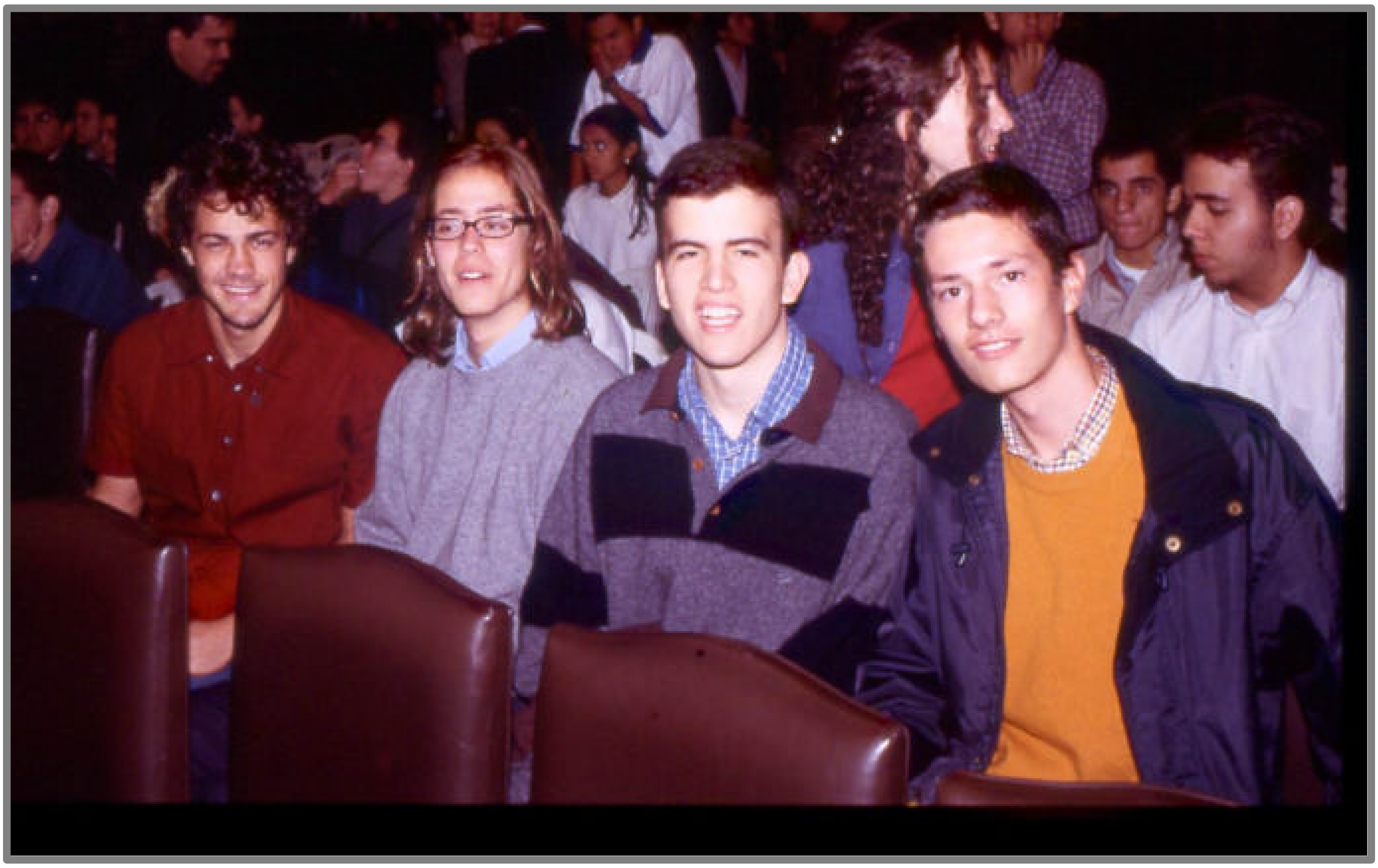
PÁGINA
PRINCIPAL

**La delegación española**

PÁGINA PRINCIPAL

**El equipo español con otros participantes**

PÁGINA
PRINCIPAL



**El equipo español en el acto de apertura**

PÁGINA
PRINCIPAL

**El equipo español en el acto de entrega de premios**

PÁGINA
PRINCIPAL

**La delegación española en Montevideo**

PÁGINA PRINCIPAL

**La residencia de los participantes en Minas**

PÁGINA PRINCIPAL

**La delegación española de paseo en Minas**

PÁGINA
PRINCIPAL


**La delegación española en el aeropuerto de Miami, de camino a San Salvador**

PÁGINA PRINCIPAL


**El equipo ante la residencia, con el tutor y la guía salvadoreña**

PÁGINA PRINCIPAL


**Acto de clausura. Sergio Millán con su medalla de plata**

PÁGINA
PRINCIPAL

**Acto de inauguración. En primer término, sentados, los concursantes del equipo español**

PÁGINA PRINCIPAL

**Danzas populares en el acto de inauguración**

PÁGINA
PRINCIPAL

**Los concursantes, con el tutor y la guía salvadoreña, en un restaurante**

PÁGINA PRINCIPAL

**Los concursantes y el tutor**

PÁGINA PRINCIPAL


**El equipo español después del acto de clausura**

PÁGINA
PRINCIPAL


**Luis Hernández Corbato junto a Juan Ignacio Restrepo Lozano después de recibir sus medallas de plata**

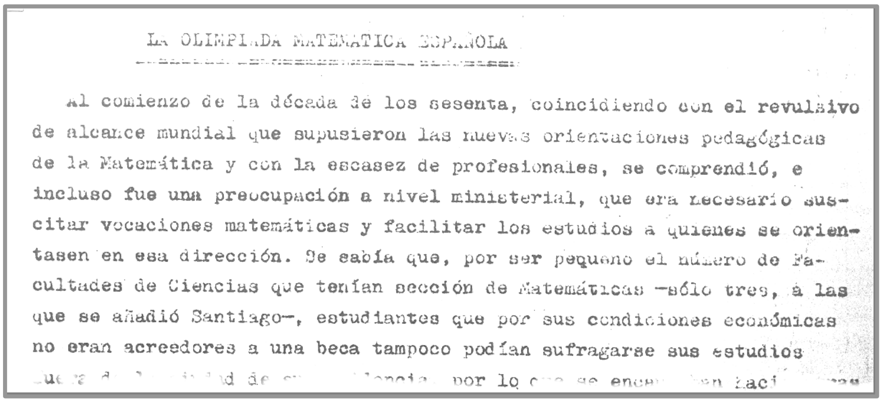
PÁGINA PRINCIPAL


**Acto de clausura. Daniel Rodrigo López y otros dos concursantes después de recibir sus medallas de bronce**

PÁGINA PRINCIPAL


**Acto de clausura. Maite Peña Alcaraz y otros concursantes después de recibir sus medallas de bronce**

PÁGINA PRINCIPAL



LA OLIMPIADA MATEMATICA ESPAÑOLA

Al comienzo de la década de los sesenta, coincidiendo con el revulsivo de alcance mundial que supusieron las nuevas orientaciones pedagógicas de la Matemática y con la escasez de profesionales, se comprendió, e incluso fue una preocupación a nivel ministerial, que era necesario suscitar vocaciones matemáticas y facilitar los estudios a quienes se orientasen en esa dirección. Se sabía que, por ser pequeño el número de Facultades de Ciencias que tenían sección de Matemáticas —sólo tres, a las que se añadió Santiago—, estudiantes que por sus condiciones económicas no eran acreedores a una beca tampoco podían sufragarse sus estudios

# LA OLIMPIADA MATEMÁTICA ESPAÑOLA

Al comienzo de la década de los sesenta, coincidiendo con el revulsivo de alcance mundial que supusieron las nuevas organizaciones pedagógicas de la Matemática y con la escasez de profesionales, se comprendió, e incluso fue una preocupación a nivel ministerial, que era necesario suscitar vocaciones matemáticas y facilitar los estudios a quienes se orientasen en esa dirección. Se sabía que, por ser pequeño el número de Facultades de Ciencias que tenían Sección de Matemáticas – sólo tres, a las que se añadió Santiago -, estudiantes que por sus condiciones económicas no eran acreedores a una beca tampoco podían sufragarse sus estudios fuera de la ciudad de residencia, por lo que se encauzaban hacia otras ramas de las ciencias cultivadas en la Facultad de su distrito, perdiéndose así posibles futuros matemáticos.

La Real Sociedad Matemática Española entendió este problema y se dispuso a colaborar en su solución. En su Junta General celebrada en Salamanca en diciembre de 1963 se llevó a estudio un proyecto inspirado en actuaciones que se venían siguiendo en algunos países, en particular del Este europeo, consistente en celebrar unas llamadas olimpiadas para alumnos que terminasen la Enseñanza Media y hubieran de elegir carrera. Estas olimpiadas consistían en la resolución de problemas bien elegidos, que mirasen más a la aptitud del candidato para este estudio y requiriesen, por tanto, mayor capacidad para el discurrir matemático que erudición.

La Comisaría de Protección Escolar, y sus sucesoras, Dirección General de Promoción Estudiantil e Instituto Nacional de Asistencia y Promoción del Estudiante, supieron igualmente comprender el significado de este concurso y lo acogieron con gran benevolencia, concediendo unas becas para los estudiantes, tres a lo sumo por distrito, que la R.S.M.E. seleccionase, además de conferir unos premios nacinales a tres ganadores entre los seleccionados. Estas becas eran prorrogables cada año durante los estudios de Licenciatura, siempre que el estudiante cumpliera las condiciones requeridas a todos los becarios, de aprobar todas las asignaturas en junio, y además, de no abandonar la carrera de Matemáticas. La R.S.M.E. se ocupaba de la labor técnica de preparación y calificación de los ejercicios y de la propuesta al I.N.A.P.E. de los ganadores anuales, así como de las prórrogas, para lo que hacía el seguimiento de los estudios de todos los becarios.

El éxito coronó aquel proyecto y pudo comprobarse cómo la selección que se hacía proporcionaba un elemento humano de primera calidad, de tal forma que, si bien ahora parecería menos necesaria la olimpiada para conseguir más matemáticos, puesto que han variado las circunstancias que obraban en el tiempo de su creación, sí que lo son para conseguir mejores matemáticos. Hay un buen número de catedráticos, titulares de Universidad e investigadores procedentes de los ganadores de las Olimpiadas nacionales. Algunos nombres, por orden cronológico: Sánchez Giralda, Martínez Gadea, Souto Menéndez, Lozano Imizcoz, Vinuesa, Martínez Verduch, Welters, Córdoba Barba, Rubio de Francia, Bayod, López Melero, Turiel Sendín, Bermúdez de Castro, Bernardo, Ardanuy, Moriyón, González Llavona, Domínguez Benavides, Sivera, Lafuente, Barros, Romero, Sanz Serna, Etayo Gordejuela, Frutos Escrig,…

En los años siguientes, otros muchos países han organizado también sus olimpiadas y, finalmente, se vienen celebrando algunas a nivel internacional, a las cuales se han incorporado también los españoles, a través de los alumnos seleccionados en las olimpiadas nacionales.

J. Javier Etayo Miqueo


epsilon 6/7

director :

Rafael Pérez Gómez

redactor jefe :

Manuel Vela Torres

jefatura de medios informáticos :

Moisés Coriat Benarroch

consejo de redacción :





**práctica**

Coordinación: Aquilino Pérez de Madrid y Carmen García Arribas

# las olimpiadas internacionales de matemáticas


María Gaspar Alonso-Vega (1)
Ceferino Ruiz Garrido (2)
Pilar Sandoval Sierra (3)

(1) Agregada de Bachillerato en el I.B. "Beatriz Galindo" Madrid. Jefe Adjunto de la Delegación Española en las IMO de 1984 y 1985.
(2) Catedrático de la Universidad de Granada. Jefe de la Delegación Española en las IMO de 1983 y 1985.
(3) Agregada de Bachillerato en el I.B. "Pedro Antonio de Alarcón" (Guadix) Granada. Observador en la IMO de 1985.

## UN POCO DE HISTORIA

Buscando los antecedentes de las competiciones matemáticas en las que se han de resolver problemas, hemos de remontarnos a la Hungría de 1894, donde se realizó un concurso para conmemorar que el Presidente de la Sociedad Matemática Húngara había sido promocionado a Ministro de Educación. En el sentido actual de las competiciones matemáticas, en las que participan voluntariamente destacados estudiantes de secundaria, considerando éstas como una actividad deportiva, los primeros antecedentes son las Olimpiadas que, en 1934 y 1935, organizaron las Universidades Estatales de Leningrado y Moscú, respectivamente, en un ámbito local. Entre 1934 y 1950, se organizaron olimpiadas matemáticas, o competiciones similares con diversos nombres, en numerosos paises, todas ellas desarrolladas de manera piramidal; es decir, torneos a nivel de centro o local, seguidos de competiciones provinciales o regionales, que solían culminar en una contienda a nivel nacional.

En España, estos concursos se crearon en diciembre de 1963, por la Real Sociedad Matemática Española como "premios para alumnos de Preuniversitario, para favorecer las vocaciones de estudios matemáticos" (Gaceta Matemática, tomo XV, 1963). La primera Olimpiada Matemática tuvo lugar en julio de 1964, en la que ganó el primer premio Don Eugenio Miranda Palacios (actual profesor de la Universidad de Granada). Estas Olimpiadas Matemáticas continúan desarrollándose en dos fases, la primera a nivel de Distrito Universitario, entre estudiantes de C.O.U. (antes eran de Preuniversitario), seleccionándose en ella a 3 estudiantes que, aparte de ganar una Beca para estudiar la Licenciatura de Ciencias Matemáticas, participan en la segunda fase a nivel de todo el Estado, donde los premios suelen ser en metálico. En los últimos tres años, esta segunda fase ha servido para seleccionar los participantes en las Olimpiadas Matemáticas Internacionales.

La iniciativa de organizar una Olimpiada Matemática a nivel internacional fué tomada en Rumanía por el profesor Tiberiu Roman, en 1956. La idea se consolidó en julio de 1959, al realizarse la primera Olimpiada Matemática Internacional (I.M.O.) en Brasov, (Rumanía); en ella participaron siete países, concretamente, Bulgaria, Checoslovaquia, Hungría, República Democrática Alemana, Polonia, Rumanía y Rusia. Desde esta ocasión y hasta 1985, con la excepción de 1980 que debío ser organizada por Mongolia, cada año ha tenido una I.M.O., habiéndose realizado la XXVI I.M.O. en Joutsa (Finlandia), del 1 al 15 de julio de 1985. Sería prolijo entrar a detallar cada una de las I.M.O. realizadas; en resumen, cabe decir que hasta 1975, todas las I.M.O. tuvieron lugar en un país de la llamada Europa del Este, saliendo de este contexto geográfico en la de Austria de 1976. En el conjunto de estas competiciones han participado unos 3000 jovénes estudiantes de 41 países.

**ORGANIZACIÓN DE LAS OLIMPIADAS MATEMÀTICAS INTERNACIONALES**

Es de destacar aquí que las I.M.O. se desarrollan de manera autónoma, sin encuadrarse en las actividades de ningún organismo internacional, aunque normalmente el país organizador reciba ayuda de estos organismos; por tanto, estas competiciones se mantienen gracias a la voluntad de los países organizadores. La responsabilidad organizativa y el reglamento por el que se rige una I.M.O. son competencia exclusiva del país organizador, el cual corre con todos los gastos, a excepción de los viajes. La sede de una I.M.O. es fijada por el Jurado Internacional entre los países que presentan su candidatura. El país designado puede invitar a cuántos países desee, pero acepta formalmente el compromiso de invitar al menos a todos los países que hayan participado en la I.M.O. precedente; de ahí la importancia de participar ininterrumpidamente en estas competiciones. Con la participación en la XXIV Olimpiada Matemática Internacional de Paris, por invitación de Francia, España se ha incorporado al conjunto de países participantes en las I.M.O.; asimismo, ha concurrido a la de Praga de 1984 y a la de Joutsa de 1985. En ninguna de estas tres ocasiones, nuestros concursantes han conseguido medallas, pero su actuación ha sido muy digna, máxime si se tiene en cuenta que los estudiantes españoles concurren sin ninguna preparación específica, frente a jóvenes muy preparados procedentes de países con larga experiencia en este tipo de competiciones.

Como ya se ha dicho, la participación en las I.M.O. es por invitación y el reglamento es fijado por el país organizador. Sin embargo, en líneas generales podemos detallar las normas que la tradición ha impuesto. Cada país participante envía una Delegación formada por un Jefe de Delegación, un Jefe Adjunto y un equipo de 6 estudiantes (en 1983 y 1985 España participó solamente con 4 estudiantes); también pueden asistir observadores. Los estudiantes deben ser menores de 21 años y haber cursado estudios secundarios en el curso precedente. Las lenguas oficiales son Alemán, Francés, Inglés y Ruso, aunque cada participante resuelve los problemas en su lengua materna. Los países invitados son instados a enviar entre 3 y 5 problemas, de entre los que el Jurado sacará las seis cuestiones que, en dos sesiones de cuatro horas y media, han de resolver los estudiantes. El

Jurado Internacional está formado por todos los Jefes de Delegación, en igualdad de voz y voto. Las misiones de este Jurado, aparte de las citadas, son entre otras: decidir la puntuación que se da a cada cuestión, establecer sus versiones exactas en cada lengua oficial, velando por la correcta traducción de los problemas a las lenguas de los estudiantes, responder a las preguntas que los estudiantes puedan formular en la primera media hora de cada sesión, así como establecer la distribución de premios. Las funciones de los Jefes Adjuntos se corresponde bien con las propias de un entrenador en cualquier otro tipo de competición deportiva.
La corrección de los ejercicios es realizada por los dos Jefes de cada Delegación quienes, a la vista de los resultados de los miembros de su equipo, establecen junto con los Coordinadores, las puntuaciones de cada problema. La misión principal de los coordinadores es garantizar la homogeneidad de las calificaciones. En caso de discrepancia entre las partes, la decisión final la tomará el Jurado en pleno.

Los premios o medallas, más bien simbólicos, se establecen en tres categorías: oro, plata y bronce, siguiendo aproximadamente, la razón 1:2:3; asimismo se otorgan premios especiales a soluciones particularmente elegantes u originales. La entrega de premios se realiza en la Ceremonia de Clausura de la Olimpiada.

Es importante destacar que las I.M.O. no son una competición por equipos, sino competición individual. Los participantes hacen su trabajo individualmente y sólo es premiado este trabajo individual, de manera que el resultado de un miembro de un equipo no se suma ni se compara con el de los demás miembros del mismo. Sin embargo, es inevitable que cada uno haga una suma por equipos y que después realice comparaciones, estableciéndose así una relación no oficial por países, que en general no tiene en cuenta el diferente número de estudiantes que tiene cada equipo. Los primeros puestos de estas relaciones oficiosas de las 26 I.M.O. celebradas han sido ocupadas de la manera siguiente: Rusia en 11 ocasiones, Hungría en 6, Rumanía en 3, República Federal de Alemania y Estados Unidos de América en 2, y República Democrática Alemana y Checoslovaquia en una.

**SUGERENCIAS A QUIENES PROCEDA…**

Aunque el lugar ocupado por España en esas relaciones sea relativamente bajo, en parte debido a su participación con menos jóvenes que otros países, no debemos desistir en el intento y continuar comprometiendo en esta labor a todo el sistema educativo. Por nuestra experiencia en este tipo de acontecimientos, nos atrevemos a indicar aquí algunas sugerencias de cara al futuro, las cuales ya han comenzado a dar fruto donde se han seguido. De una parte, habría que incentivar la realización de competiciones matemáticas a nivel de centro o de localidad, como se viene haciendo aisladamente en algunos centros, de modo que concurrieran a la fase de Distrito Universitario los ganadores de éstas; a la vez habría que desterrar la innecesaria tradición de que sólo concurran alumnos de C.O.U., con lo que se impide que un estudiante genial pueda concurrir a más de una I.M.O.; también sería bueno eliminar la nefasta idea de que concurrir a las Olimpiadas de Matemáticas sólo interesa a los futuros estudiantes de la Licenciatura de Ciencias Matemáticas, pues la experiencia ha demostrado que los mejor clasificados en las I.M.O. no siempre han seguido después estos estudios.

De otra parte, será beneficiosa la difusión entre la sociedad de este tipo de acontecimientos; para ello es menester comenzar por difundir estas actividades entre los Profesores de Matemáticas mediante las Asociaciones de Profesores, los futuros Centros de Profesorado, los Seminarios Permanentes, etc. El interés por este tipo de competiciones, en las que se ofrece a los alumnos la oportunidad de mostrar sus cualidades para afrontar situaciones que puedan ser analizadas mediante una metodología matemática, es inestimable. Esto llevaría aparejado el compromiso de los docentes para que, fuera de las actividades académicas normales y a modo de taller de matemáticas, presten una atención específica a sus alumnos más capacitados. Estamos seguros de que este tipo de medidas no sólo han de beneficiar a los posibles competidores, sino que a la larga han de redundar en beneficio de una mejora del nivel matemático y científico de todos nuestros alumnos.

Por último, estamos a la disposición de cuantas personas e instituciones consideren que nuestra experiencia puede servirle de ayuda, a la hora de programar sus actividades; al mismo tiempo instamos a que nos remitan problemas inéditos, con el fin de proponerlos en futuras Olimpiadas Matemáticas Internacionales.

# Recuerdo de algunas iniciativas de D. Pedro Abellanas

**Joaquín Arregui**

*Departamento de Geometría y Topología*
*de la Universidad Complutense*

En el título de estas breves líneas menciona la palabra " algunas" porque quiero referirme sólo a dos de las variadas iniciativas que D. Pedro realizó en pro de las matemática española a lo largo de su dilatada vida profesional. Son dos cuestiones de las que en su inicio fui testigo directo.

## 1. Reuniones Anuales de Matemáticos Españoles.

En 1960 se inició mi colaboración con D. Pedro Abellanas en el Instituto Jorge Juan de Matemáticas del C.S.I.C., del que entonces D. Pedro era Director. De vez en cuando teníamos en su despacho unas reuniones informales, que podríamos llamar tertulias matemáticas, a las que asistían más habitualmente, Botella, Etayo, Miguel Laplaza, Gonzalo Calero,. . . y, con menos frecuencia, José Matínez Salas, Pascual Ibarra, Ángel Martínez Losada, y quizá algun otro.

. . .     . . .     . . .     . . .

. . .     . . .     . . .     . . .

## 2. Olimpíadas Matemáticas Españolas.

Otro de los recuerdos que tengo de aquellas tertulias en el despacho de D. Pedro se refiere a la ocasión en que éste hizo algunas consideraciones acerca de los pocos jóvenes que entonces hacían la carrera de Matemáticas. Esta circunstancia le alentaba a hacer algo que animase a cursar los estudios universitarios de Matemáticas a aquéllos que tuvieran una relevante aptitud para este tipo de saberes. Más adelante tuve la referencia de que en una conversación con Lora Tamayo, a la sazón Ministro de Educación, éste le comentó a D. Pedro que en España hacían falta muchos más matemáticos.

D. Pedro tenía información de las Olimpíadas Matemáticas que se hacían en algunos paises, especialmente del Este Europeo, y consideraba posible organizar algo semejante en España, viendo en la institución de las Olimpíadas una posible vía para fomentar las vocaciones matemáticas.

Poco después, contando con la ayuda del Ministerio de Educación, en la Junta General de la R.S.M.E. que tenía lugar en Salamanca, en diciembre de 1963 con ocasión de la IV R.A.M.E., D. Pedro expuso su proyecto sobre las Olimpíadas. La idea fue bien recibida, y en la misma Junta se acordaron las líneas generales de su organización y también la realización de la I Olimpíada en el mismo curso 1963-64.

Podían presentarse a la Olimpíada los alumnos del último curso de Enseñanza Media. La Delegación de la R.S.M.E. en cada Distrito Universitario se encargaba de organizar la Olimpíada para los alumnos de su Distrito. Los tres alumnos mejor clasificados de cada Distrito tenían opción a participar en la segunda fase de la Olimpíada, de nivel nacional, cuya organización correspondía a la R.S.M.E. A los tres ganadores de cada Distrito Universitario el Ministerio de Educación les concedía una beca del P.I.O. (Patronato de Igualdad de Oportunidades) para cursar la Licenciatura de Matemáticas, con las mismas condiciones que se exigían a los demás becarios del P.I.O.; y los tres mejores calificados en la prueba nacional recibían un premio en metálico. La R.S.M.E. era la encargada del seguimiento de los estudios de los becarios.

Las pruebas de la Olimpíada consistían en resolver algunos problemas elegidos de modo que su resolución dependiese más de aptitud para estudiar Matemáticas que de la erudición.

Con el paso de los años fueron cambiando los detalles de la organización de las Olimpíadas y también los premios a los ganadores, pero gracias a la comprensión del significado de estas Olimpíadas por parte de los sucesivos organismos pertinentes del Ministerio de Educación: Comisión de Protección Escolar, Dirección General de Promoción Estudiantil, I.N.A.P.E., Dirección General de Promoción Educativa. . . , que siempre mantuvieron su colaboración, las Olimpíadas se celebraron todos los cursos (excepto en el curso 1977-78 en el que, a causa de un cambio de Plan de estudios, los alumnos de COU eran todos repetidores).

## 3. Olimpíadas Matemáticas Internacionales.

Pocos años antes de que se iniciaran las Olimpíadas en España se había celebrado la I Olimpíada Matemática Internacional en Rumanía con la participación de seis países del Este Europeo. A este grupo inicial se fueron incorporando después Francia, Gran Bretaña, Italia,. . . de modo que en 1977 eran eran ya 23 los países participantes, la mayor parte europeos. Por esa fecha ya se considera en la R.S.M.E., siendo su presidente D. José Javier Etayo Miqueo, la posible incorporación de España en estas Olimpíadas, pero no se consigue superar la dificultad que supone encontrar los medios económicos para llevarla a cabo. En 1982 el Instituto Nacional de Asistencia y Promoción del Estudiante I.N.A.P.E. permite vencer este obstáculo al aprobar el proyecto presentado por la R.S.M.E. para incorporar a España a las Olimpíadas Matemáticas Internacionales, y en 1983 un equipo español participa en la XXIV Olimpíada que se celebra en París.

Desde entonces España participa sucesivamente en las Olimpíadas Internacionales que se celebran en Praga (1984), Helsinki (1985), Varsovia (1986), etc. En Varsovia, el equipo español, formado por cuatro concursantes consigue una medalla de plata y dos de bronce.

## 4. Olimpíadas Iberoamericanas de Matemáticas.

En 1985, en una reunión de Ministros de Educación de los países miembros de la Organización de los Estados Iberoamericanos para la Educación, la Ciencia y la Cultura (O.E.I.) se acuerda instituir las Olimpíadas Iberoamericanas de Matemáticas, y Colombia se ofrece como sede para albergar la primera de estas competiciones. Efectivamente esta Primera O.I.M. se tiene en Bogotá, en el mismo año 1985, organizada por el Ministerio de Educación Nacional de Colombia.

Enterada la R.S.M.E. de esta iniciativa de la O.E.I., se consiguió una subvención del M.E.C. y se pudo enviar a esta Primera O.I.M. un equipo español de concursantes, que se clasificó en el primer puesto. La R.S.M.E. siguió enviando un equipo español a las sucesivas O.I.M., la segunda de las cuales se celebró en Uruguay a principios de 1987, donde el equipo español tuvo también una brillante actuación al obtener dos medallas de oro y dos de bronce.

La V Olimpíada Iberoamericana se celebró del 22 al 29 de septiembre de 1990 en Valladolid, siendo D. José Manuel Aroca Presidente de la R.S.M.E. Cada País podía enviar hasta cuatro participantes y se presentaron a competir 59 concursantes y 16 países. Los cuatro concursantes españoles tuvieron una actuación muy digna consiguiendo una medalla de oro, una de plata y dos de bronce.

Es de interés señalar que con ocasión de estas Olimpíadas se generó una intensa relación entre los países de la O.E.I. que se concretó luego en importantes acuerdos en el área cultural y educativa.

La participación española en estas Olimpíadas Matemáticas de nivel internacional motivó que, además que la Dirección General de Promoción Educativa, que venía auspiciando las Olimpíadas Nacionales, intervinieran también la Subdirección General de Cooperación Internacional, y luego la Dirección General de Renovación Pedagógica. Como se ve la organización de las Olimpíadas se iba haciendo cada vez más compleja, al exigir más atención a los aspectos tanto de tipo técnico como económico y también administrativo. Esta situación llevó, por iniciativa del Presidente de la R.S.M.E. entonces D. Pedro Luis García Pérez, a la publicación en el B.O.E. de 9-II-1988 de la Orden Ministerial de 4-II-1988 por la que se crea la Comisión Coordinadora de la Participación Española en la Olimpíadas Matemáticas Internacionales, que determina el marco institucional de participación de Ministerio i R.S.M.E. en el que han de realizarse las Olimpíadas Matemáticas.

Es un hecho que los nombres de un número apreciable de Catedráticos, Profesores Titulares de Universidad, y de Investigadores se pude encontrar en las listas de los ganadores de las Olimpíadas matemáticas, por lo que bien se puede decir que aquel proyecto que D. Pedro sacó adelante y al que prestó tantas horas de dedicación —con la generosa ayuda de otras personas que no es del caso citar aquí— fue coronado por el éxito.

# OLIMPIADA I

## ENTREGA DE PREMIOS

Coincidiendo con la «V Reunión de Matemáticos Españoles», en Valencia, celebró, el día 30 del pasado noviembre, su Junta general anual la *Real Sociedad Matemática Española.*

Presidieron el acto el Presidente de la Sociedad, Profesor Botella, y el Profesor Torroja, acompañados de otras representaciones y miembros de la Directiva.

Después de dar cuenta del resultado de esta «I Olimpíada», se procedió a la entrega de premios a los ganadores de la misma:

*Don Eugenio J. Miranda Palacios.*
Primer premio: 20.000 pesetas.

*Don Alberto de la Torre.*
Segundo premio: 6.000 pesetas.

*Don Antonio Oliva Cuyás.*
Tercer premio: 3.000 pesetas.

# OLIMPIADA I

## GANADORES DE LA OLIMPIADA

**Primer premio nacional**

EUGENIO J. MIRANDA PALACIOS

Natural de Archidona (Málaga). De dieciocho años de edad. Estudió sus primeras letras en el Colegio de los Hermanos de la Caridad. Desde los siete años estudió en el Colegio de la Inmaculada, de los Hermanos Maristas, obteniendo Matrícula de Honor en Ingreso y Reválida Elemental, así como en la asignatura de Matemáticas durante los siete años del Bachillerato y en el curso Preuniversitario. En Reválida Superior alcanzó la puntuación de 8,4.

**Segundo premio nacional**

ALBERTO DE LA TORRE

Nació en Madrid en 1946. El menor de cinco hermanos, huérfano de padre desde los nueve años, se educó en el Colegio de San Miguel Arcángel, de los Padres Salesianos, donde cursó el Bachillerato, con gran aprovechamiento.

**Tercer premio nacional**

ANTONIO OLIVA CUYÁS

Hizo sus estudios de Bachillerato, con brillante aprovechamiento, en el Colegio La Salle Condal, de Barcelona, así como el curso Preuniversitario. Actualmente estudia el Selectivo en la Facultad de Ciencias de la Universidad de dicha capital.

# II OLIMPIADA
# PARTICIPANTES DE LA SEGUNDA FASE

## RELACION DE ALUMNOS SELECCIONADOS EN LA PRIMERA FASE DE LA OLIMPIADA

**Distrito Universitario de Madrid**

1. Vinuesa Tejedor, Jaime.
2. Méndez Rutllán, Andrés.
3. Gordillo Florencio, Elias José.

**Distrito Universitario de Barcelona**

1. Calbet Rebollo, Francisco.
2. Solé Subiela, José Oriol.
3. Welters Dyhdalewicz, Gerald.

**Distrito Universitario de Granada**

1. Jiménez Gil, Maria Teresa.
2. Navarro Orozco, Pedro.
3. Hernández Santamaria.

**Distrito Universitario de La Laguna**

1. Fajardo Spinola, José.
2. Briones Fernández, Claudio.
3. Losada Cabrera, Manuel.

**Distrito Universitario de Murcia**

1. López de Sá de Madariaga, Juan Maria.
2. Torroglosa Ponce, Vicente.
3. Turégano Bosque, Maria Florentina.

**Distrito Universitario de Oviedo**

1. Goy Goy, Alfredo.
2. Arias Fernández, Angel Manuel.
3. González Castaño, Lorenzo.



**Distrito Universitario de Salamanca**

1. Mateos-Garcia, Jaime.
2. Pérez Castellanos, José Luis.
3. Majado-González, Abelardo.

**Distrito Universitario de Santiago**

1. Montenegro Criado, Santiago.
2. Costa Boronat, Victor.
3. Otero Blanco, José Ignacio.

**Distrito Universitario de Sevilla**

1. Fatuarte Torres, Fernando.
2. Gastón Fernández, Miguel.
3. Cuesta Muñoz, Julián.

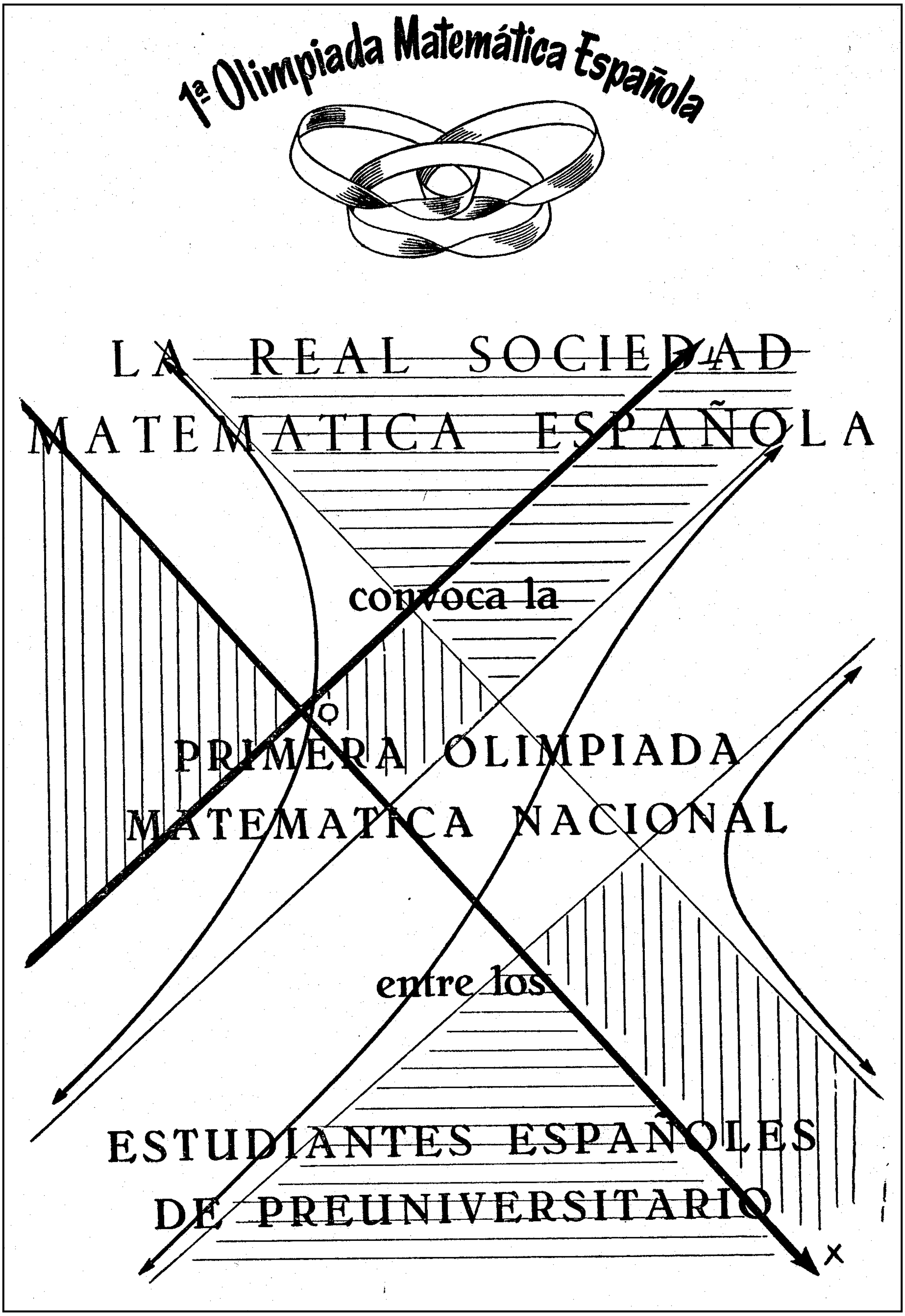
**Distrito Universitario de Valencia**

1. Sancho Garcia, José.
2. Puig Espinosa, Luis.
3. Martinez Verduch, José Ramón.

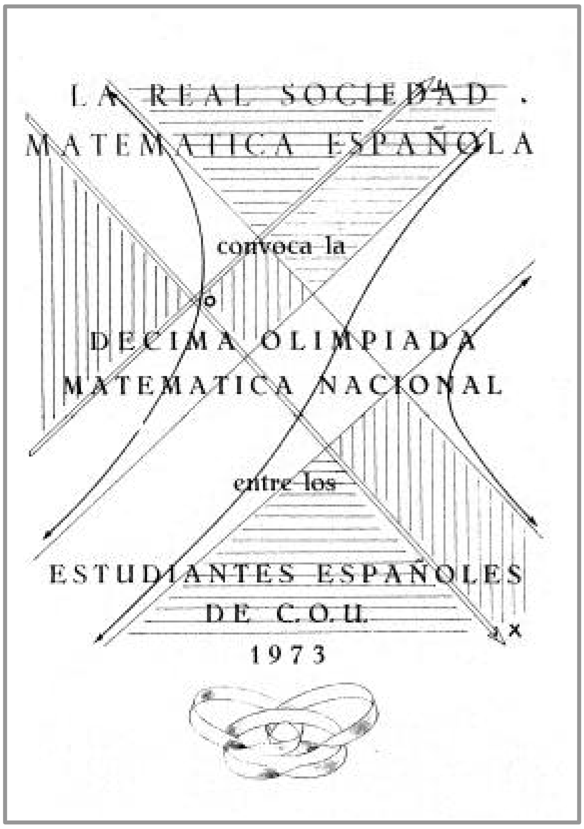
**Distrito Universitario de Zaragoza**

1. Bel Gil, Maria del Carmen.
2. Mejias Zurita, Manuel.
3. Vázquez Lapuente, Manuel.

# CARTEL DE LA PRIMERA OLIMPIADA



# ADAPTACIÓN DE LOS CARTELES A LOS PLANES DE ESTUDIO

# ÍNDICE DE PREMIADOS

- Los números que siguen los nombres indican:

  **Cifras solas:** Número de OME en la que se obtuvo premio. En las Olimpiadas 1 a 18 hay tres premiados en la fase nacional. A partir de la Olimpiada 19 España participa en la IMO y se amplia el número de premiados, que son cuatro en la 19 y seis a partir de la 20. En la actualidad se les distingue con medallas de oro en la OME. Las cifras entre paréntesis indican que el concursante participa en la IMO o la OIM en sustitución de un premiado que no puede acudir al certamen internacional.

  **Una I seguida de cifras:** Número de la IMO (Olimpiada Internacional) en la que participa un concursante.

  **Una A seguida de cifras:** Número de la OIM (Olimpiada Iberoamericana) en la que participa un concursante.

- El símbolo $\boxed{\text{F}}$ indica un vínculo a una fotografía individual del premiado.

- El símbolo $\boxed{\text{G}}$ indica un vínculo a una fotografía de grupo del premiado.

- Los nombres en **negrita** corresponden a concursantes que han obtenido premio (medalla de oro) dos veces.

- El nombre en MAYÚSCULA corresponde al único concursante que ha obtenido premio (medalla de oro) tres veces.